| المملكة المغربية<br>وزارة التربيةالوطنية والشباب | الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريـــــــــــــــــــا<br>دورة : يوليوز 2003<br>( الدورة الإستدراكية ) | الثانية علوم رياضية<br>مدة الإنجاز: 4 ساعات<br>المعامل : 10 |
|---|---|---|

## التمرين الأول ( 3نقط)

لدينا صندوقان U و V. الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و4 كرات زرقاء؛
الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و4 كرات زرقاء؛

نعتبر التجربة الآتية:

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U: إذا كانت حمراء ، نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V؛ وإذا كانت زرقاء، نضعها جانبا؛ ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V.

ولتكن الأحداث التالية:

$R_1$ : " الكرة المسحوبة من U حمراء "؛

$B_1$ : " الكرة المسحوبة من U زرقاء "؛

$R_2$ : " الكرة المسحوبة من V حمراء "؛

$B_2$ : " الكرة المسحوبة من V زرقاء "؛

1 — 1) احسب احتمال الحدثين $R_1$ و $B_1$.

1 — 2) احسب احتمال " $B_2$ علما أن $R_1$ محقق " واحتمال " $B_2$ علما أن $B_1$ محقق ".

0.5 — 3) بين أن: $p(B_2)=\frac{13}{21}$ .

0.5 — 4) استنتج $p(R_2)$ .

## التمرين الثاني ( 4نقط ونصف)

ليكن $\theta$ عددا حقيقيا بحيث: $0\le\theta\le 2\pi$ . نضع: $p=5\cos\theta+3i\sin\theta$ .

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ التالية: $(E):\quad z^2-2pz+16=0$ .

0.5 — 1) أ- تحقق أن: $p^2-(3\cos\theta+5i\sin\theta)^2=16$

0.5 — ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$: نرمز بـ $z_1$ و $z_2$ لحلي المعادلة $(E)$ بحيث: $|z_1|<|z_2|$.

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$؛

نعتبر النقطتين $M_1$ و $M_2$ اللتين لحقاهما على التوالي هما $z_1$ و $z_2$ .

0.5 — أ) بين أنه عندما يتغير العدد $\theta$ في المجال $[0;2\pi[$، فإن النقطة $M_1$ تتغير على دائرة $(C)$ ينبغي تحديد معادلة لها.

ب) لتكن P منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

ولتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط P عندما يتغير العدد $\theta$ في المجال $[0;2\pi[$.

بين أن $(\Gamma)$ إهليلج بؤرتاه هما النقطتان $F$ و $F'$ اللتين لحاقهما 4 و -4. 0.5

3) أ- بين أنه لكل عددين عقديين $a$ و $b$ من $\mathbb{C}-\{4\}$، لدينا: $(ab=16)\Leftrightarrow\left(\frac{b+4}{b-4}=-\frac{a+4}{a-4}\right)$. 0.5

ب- استنتج أن: $\frac{z_2+4}{z_2-4}=-\frac{z_1+4}{z_1-4}$. 0.5

ج- بين أن: $\overline{(\overrightarrow{M_1F};\overrightarrow{M_1F'})}\equiv\pi+\overline{(\overrightarrow{M_2F};\overrightarrow{M_2F'})}[2\pi]$. 0.5

4) أ) بين أن المعادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(\Gamma)$ في النقطة $P$ هي: $3x\cos\theta+5y\sin\theta=15$. 0.5

ب) بين أن: المماس $(T)$ عمودي على المستقيم $(M_1M_2)$. 0.5

## التمرين الثالث ( 3 نقط )

لكل $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$، نعتبر المصفوفة $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$.

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$، لتكن E مجموعة المصفوفات الآتية: $E=\{M_{(a;b)}/a^2-2b^2=1\}$.

1) نضع: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$. تحقق أن A تنتمي إلى E. 0.25

2) أ- بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$ وأن القانون $\times$ تبادلي في E. 0.5

ب- بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$. 0.5

ج- بين أن $(E;\times)$ زمرة تبادلية. 0.5

3) نضع: $A^0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$، ولكل $n$ من $\mathbb{N}$: $A^{n+1}=A^n\times A$.

نعتبر المجموعة: $G=\{A^n/n\in\mathbb{N}\}$.

أ) تحقق أن: $G\subset E$. 0.25

ب) لتكن $H$ مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة لعملية $\times$ في E. 0.5

بين أن: $H=\{B^n/n\in\mathbb{N}\}$ حيث: $B=\begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.

ج) بين أن: $G\cup H$ زمرة جزئية من $(E;\times)$. 0.5

## التمرين الرابع ( 9 نقط ونصف)

**I**- ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية $g_n$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g_n(x)=x+e^{-nx}$.

وليكن $(C_n)$ المنحنى الممثل للدالة $g_n$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أدرس تغيرات الدالة $g_n$ . 0.5

ب- بين أن $g_n$ تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي $u_n$ يتم تحديده بدلالة $n$. 0.5

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ 0.5

ب- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(C_n)$. 0.5

3) أ- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_1)$ و $(C_2)$ الممثلين للدالتين $g_1$ و $g_2$. 0.5

ب- ارسم، في نفس المعلم، المنحنيين $(C_1)$ و $(C_2)$. 0.5

( نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ ونعطي: $\ln 2\approx 0,7$ ).

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء، احسب بدلالة $x$ التكامل: $I(x)=\int te^{-2t}dt$. 1

ب- لتكن $h_2$ قصور الدالة $g_2$ على المجال $[0;\ln 2]$. 0.5

احسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ $h_2$ حول محور الأفاصيل.

5) بضع: $v_n=g_n(u_n)$.

بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتان وحدد نهايتهما. 1

**II** - نعتبر الدالة العددية $F_n$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $F_n(x)=x+e^{nx}$

وليكن $(\Gamma_n)$ منحنى الدالة $F_n$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) ادرس تغيرات الدالة $F_n$. 0.5

2) استنتج أن المعادلة $F_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$. 0.5

3) أ- بين أن: $\alpha_1\in\left]-\ln 2,-\frac{1}{2}\right[$. 0.5

ب- بين أن $x-\alpha_1$ و $e^x+\alpha_1$ لهما نفس الإشارة. 0.5

4) أ- لتكن $\varphi$ الدالة المعرفة على $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ بما يلي: $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{\sqrt{e}}x$. 0.5

بين أن الدالة $\varphi$ تناقصية على $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

ب- استنتج أن: $\left|e^x+\alpha_1\right|\le\frac{1}{\sqrt{e}}\left|x-\alpha_1\right|$. 0.5

| | |
|---|---|
| 5) نضع: $\beta_0=-\frac{1}{2}$ ولكل عدد صحيح طبيعي $n$ : $\beta_{n+1}=-e^{\beta_n}$ .<br>أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي $a$ بحيث: $\lvert\beta_{n+1}-\alpha_1\rvert\leq a\lvert\beta_n-\alpha_1\rvert$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ .<br>ب-بين أن المتتالية $(\beta_n)$ متقاربة وحدد نهايتها. | <br>0.5<br>0.5 |