المملكة المغربية وزارة التربيةالوطنية والشباب	الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريــــــــــــــــــــــــا دورة : يونيو 2003 (الدورة العادية)	الثانية علوم رياضية مدة الإنجاز: 4 ساعات المعامل : 10

التمرين الأول (3نقط)

نعتبر في $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ المعادلة (E) الآتية: $(E):\quad x^2\left(x^2+7\right)=y(2x+y)$

ليكن $(x;y)$ عنصرا من $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ وليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y.

نضع: $x=\delta a$ و $y=\delta b$.

1) نفترض أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E).

أ- تحقق أن: $a^2\left(\delta^2a^2+7\right)=b(2a+b)$. 0.5

ب- استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث: $\delta^2a^2+7=kb$ و $2a+b=ka^2$. 0.5

ج- بين أن: $a=1$. 0.5

د- استنتج أن: $(b+1)^2=\delta^2+8$. 0.75

2) حل في $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ المعادلة (E). 0.75

التمرين الثاني (3نقط ونصف)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته: $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

1) أ- بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده. 0.5

ب- ارسم المنحنى (E). 0.5

2) لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتيهما على التوالي هما $(4;0)$ و $(0;3)$.

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفصولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0;4]$.

نضع: $x_1=4\cos(t_1)$ حيث $0\le t_1\le\frac{\pi}{2}$. ونعتبر التكامل الآتي: $I(x_1)=\frac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$.

أ- باستعمال مكاملة بتغيير المتغير وذلك بوضع $x=4\cos(t)$ حيث $0\le t\le\frac{\pi}{2}$، بين أن: 1

$I(x_1)=6t_1-3\sin(2t_1)$.

ب- لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) والمنحنى (E).

ولتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) والمنحنى (E).

*) تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3\sin(t_1)$؛ 0.25

*) احسب $S(x_1)$ بدلالة t_1. 0.25

*) استنتج قيمة S. 0.25

3) *) بين أن: $t_1 = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow S(x_1) = \frac{1}{2}S$. 0.25

*)حدد إحداثيتي M_1 في المعلم $(O;\vec{O}A;\vec{O}B)$ في حالة $t_1 = \frac{\pi}{4}$. 0.25

التمرين الثالث (4 نقط و نصف)

I- لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$، نعتبر المصفوفة $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$، لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة المصفوفات الآتية: $\mathcal{E} = \left\{ M_{(a,b)} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

1) بين أن ε جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ ومن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$. 0.75

2) بين أن $(\mathcal{E},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية. 0.25

3) أ- بين أنه لكل عددين حقيقيين x و y، لدينا: $(x^2+xy+y^2=0) \Leftrightarrow (x=y=0)$. 0.5

ب- حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(\mathcal{E},+,\times)$. 0.25

ج- استنتج أن $(\mathcal{E},+,\times)$ جسم تبادلي. 0.5

II- ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

1) بين أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$. 0.25

2) نعتبر التطبيق ψ من $\mathcal{E}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بما يلي: 0.75

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E} &\to \mathbb{C} \\ M_{(a,b)} &\to a+\sigma b \end{aligned}$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(\mathcal{E},+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$.

3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-z+1=0$. 0.75

حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة واكتب حليها على الشكل المثلثي.

4) نفترض في هذا السؤال أن: $\sigma = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 0.5

بين أن ψ تشاكل من $(\mathcal{E},\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$.

التمرين الرابع (9 نقط)

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=4\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$ ؛

وليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدته $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C). 0.5

2) أ- بين أن: $(\forall x\in]0;+\infty[),\ f'(x)=4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f). 0.25

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f . 0.75

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث: 0.75

$1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$ (نعطي $1<\ln 3<1{,}1$).

4) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1. 0.5

5) ارسم المنحنى (C). 0.75

II- 1) بين أن: $(\forall t\in[0;+\infty[)\ ,\ 1-t\le\frac{1}{1+t}\le 1$. 0.25

2) استنتج أن: $(\forall a\in[0;+\infty[)\ ,\ a-\frac{a^2}{2}\le\ln(1+a)\le a$. 0.5

III- لكل عدد صحيح n بحيث $4\le n$، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي:

$$f_n(x)=n\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$$

وليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم.

1) ادرس تغيرات الدالة f_n . 0.5

2) ادرس تقعر المنحنى (C) وبين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$. 0.5

3) أ- قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x . 0.25

ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}). 0.25

4) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث: $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$. 0.5

5) بين أن $(u_n)_{n\ge4}$ متتالية تناقصية قطعا (يمكنك استعمال نتيجة السؤال III- 3)). 0.5

6) أ- باستعمال نتيجة السؤال II- 2) ، بين أن: 0.25

$$(\forall n\ge 4)\ ,\ \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\le\ln(u_n)\le u_n-1$$

0.25	ب- استنتج أن: $(\forall n\geq 4)\ ,\ \frac{(u_n)^2}{2n}\leq u_n-1\leq\frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$
0.25	ج- بين أن: $(\forall n\geq 4)\ ,\ \frac{1}{2n}\leq u_n-1\leq\frac{e}{n}$
0.5	د- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ متقاربة محددا نهايتها.
0.5	7) أ- بين أن: $(\forall n\geq 4),\ e^{\frac{5}{6}}<v_n$ ، (نعطي: $e^{\frac{5}{3}}<5,3$).
0.5	ب- استنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n=+\infty$.