

التمرين الأول (3نقط)

- (1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .
أ- بين أنه إذا كان n فرديا فإن : $n^2 \equiv 1[8]$
ب- بين أنه إذا كان n زوجيا فإن : $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$
(2) لتكن a و b و c أعدادا صحيحة طبيعية فردية .
أ- بين أن : $a^2 + b^2 + c^2$ ليس مربعا كاملا (أي ليس مربعا عدد صحيح)
ب - بين أن : $2(ab + bc + ca) \equiv 6[8]$
(لاحظ أن : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$)
ج - استنتج أن $2(ab + bc + ca)$ ليس مربعا كاملا .
د- بين أن $ab + bc + ca$ ليس مربعا كاملا.

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

التمرين الثاني (3نقط)

لتكن E مجموعة المصفوفات التي تكتب على الشكل

$$M_a = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

و F مجموعة المصفوفات التي تكتب على الشكل

$$N_a = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{bmatrix}$$

- حيث a عدد حقيقي غير منعدم .
(1) أ- بين أن : $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{*2}) : M_a \times M_b = M_{ab}$
ب - ليكن φ التطبيق المعرف من \mathbb{R}^* نحو E بحيث $\varphi(a) = M_a$.
بين أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .
استنتج البنية الجبرية لـ (E, \times) .
(2) أ- بين أن : $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{*2}) : N_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$
ب - نضع $G = E \cup F$. بين أن (G, \times) زمرة .
ج- هل (G, \times) زمرة تبادلية ؟

0,5

0,5

0,25

0,25

1

0,25

التمرين الثالث (3 نقط و نصف)

- (1) حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$
(2) لكل عدد عقدي z حيث $z = e^{i\theta}$ مع $-\pi \leq \theta \leq \pi$ و $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$ و $\theta \neq -\frac{2\pi}{3}$ نضع

0,5

$$z' = \frac{1}{z^2 + z + 1}$$

أ- تحقق من أن $z^2 + z + 1 = z(1 + z + \bar{z})$

0,5

ب - احسب معيار وعمدة z بدلالة θ .

1

ج - نضع $z' = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيتيان .

0,5

بين أن $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$

د- استنتج أن النقطة M ذات اللق z' تنتمي إلى هذلول يتم تحديد مركزه ورأسيه

1

ومقاربيه .

التمرين الرابع (10 نقط و نصف)

I - لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR^* بما يلي : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

1

(1) أحسب نهايات الدالة f عند محداث مجموعة تعريفها.

0,5

(2) أدرس تغيرات الدالة f .

(3) ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

أ- أدرس الفروع اللا نهائية للمنحنى (C) .

0,5

ب- أرسم المنحنى (C) .

0,5

II - لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in IN) : u_{n+1} = u_n^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n} \text{ و } u_0 = 1$$

(1) بين أن $(\forall x \in IR) : e^x \geq x + 1$.

0,5

(2) استنتج أن $(\forall x > 0) : x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$

0,25

(3) أ- باستعمال البرهان بالترجع بين أن $(\forall n \in IN) : 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

0,5

ب - بين أن (u_n) متتالية متقاربة وحدد نهايتها .

0,25

$$(4) \text{ نضع من أجل كل } n \text{ من } IN^* \text{ } v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

(أ) بين أنه لكل n من IN^* $v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

0,5

(ب) حدد نهاية المتتالية (v_n) .

0,25

III - نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt & ; x > 0 \\ F(0) = 2 \ln 2 \end{cases}$$

(1) أ- تحقق من أن : $(\forall x > 0) : \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt = 2 \ln(2)$

0,5

ب - باستعمال نتيجة السؤال II (1) بين أن : $(\forall t > 0) : -t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$

0,25

(2) أ- بين أن : $(\forall x > 0) : -3x^2 \leq F(x) - 2 \ln(2) \leq 0$.

0,5

ب - استنتج أن F متصلة وقابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0.

0,5

(3) أ- بين أن : $(\forall t \geq 1) : f(t) \leq e^{-t}$

0,25

ب- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

0,5

(4) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ وأحسب $F'(x)$.

0,75

ب - أعط جدول تغيرات الدالة F .

0,5

ج - ارسم المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم .

0,5

...

(5) لتكن G الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln(t) dt$

أ- بين أن $(\forall x > 0) : G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x} \ln(4x) + e^{-x} \ln(x)$

ب - أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln(x)$

ج - استنج $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$

0,5

0,5

0,5