الامتحان التجريبي للبكالوريا (ابريل 2006)

المستوى: الثانية علوم رياضية — المادة: الرياضيات

نيابة الجديدة — مدة الانجاز: 4 س

ثانوية أبي شعيب الدكالي — المعامل: 10

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.

التمرين الأول (2.5 نقطة):

نعتبر المعادلة التالية في $\mathbb{Z}^2$:

$$(F): \qquad 2x^2+5y^2=1000$$

نريد أن نبين بأن المعادلة السابقة لا تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$:

نفترض أن المعادلة (F) تقبل حلا (x_0,y_0) ، بحيث x_0 و $0 \le y_0$.

a− بين أن x_0 مضاعف للعدد 5 و y_0 مضاعف للعدد 2 .	0.5
b− إستنتج أن المعادلة : $5x^2+2y^2=100$ (F_1) ، تقبل حلا (x_1,y_1) في $\mathbb{N}^2$.	0.25
c− بين أن x_1 مضاعف للعدد 2 و y_1 مضاعف للعدد 5 .	0.5
d− إستنتج أن المعادلة : $2x^2+5y^2=10$ (F_2) ، تقبل حلا (x_2,y_2) في $\mathbb{N}^2$.	0.25
e− إستنتج أن المعادلة : $5x^2+2y^2=1$ (F_3) ، تقبل حلا في $\mathbb{N}^2$.	0.5
f− ماذا تستنتج ؟	0.5

|c|c|

التمرين الثاني (1.75 نقطة):

كيس يحتوي على n كرة بيضاء $n \in \mathbb{N}$ ، 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء. نسحب تآنيا كرتين من الكيس .

1− ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين؟	0,5
2− نفترض أن $n \ge 2$. نرمز ب $p(n)$ لاحتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.	
a− بين أن $p(n)=\frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$.	0,5
b− أحسب $\lim_{n\to+\infty} p(n)$ ، ثم أول النتيجة المحصل عليها.	0.75

التمرين الثالث (3.75 نقطة):

في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقيهما a و 1 على التوالي . $(a \neq 1)$.

لتكن f الدالة المعرفة من $\mathcal{P}\backslash\{B\}$ نحو $\mathcal{P}$ والتي تربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M(z')$ بحيث $z'=\frac{z-a}{z-1}$.

1− بين أنه إذا كانت النقطة $M(z)$ صامدة بالتطبيق f فإن z حل للمعادلة : $(E) \quad z^2-2z+a=0$.	0.25
2− نفترض أن $a=1+e^{i\theta}, \theta\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ ، حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ثم اكتبهما على الشكل المثلثي.	1.5
3− في هذا السؤال نفترض أن $a=-1$. لتكن M نقطة لحقها $z\neq 1$ و M' لحقها $z'=f(z)$.	
أ - بين أن: $(\vec{u},\overrightarrow{BM})+(\vec{u},\overrightarrow{BM'})\equiv 0[2\pi]$.	0.5
ب - إستنتج أن نصف المستقيم $[BA)$ منصف للزاوية $(\widehat{MBM'})$.	0.25
ج - بين أن z' عدد تخيلي صرف يكافئ $|z|=1$ و $z\neq -1$.	0.75
د - استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' صورة النقطة M من الدائرة المثلثية محرومة من النقطة B .	0.5

التمرين الرابع (8 نقطة):

الجزء A :

1- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1,+\infty[$ ب: $g(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$.

a- بين ان g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$. 0.5

b- إستنتج اشارة g على $]0,+\infty[$. 0,25

2- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$.

و $\mathcal{C}$ منحناها في معلم متعامد $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ بحيث: $\|\overrightarrow{j}\|=2\|\overrightarrow{i}\|=2cm$

a- أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و بملاحظة $f(x)=\frac{x}{e^{x}}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$ أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. 0.75

b- إستنتج أن $\mathcal{C}$ يقبل مقاربين ، محددا معادلتيهما. 0.5

3 - a- أحسب $f'(x)$ و عبر عنها بدلالة $g(e^{x})$. 0.75

b- إستنتج اشارة $f'(x)$ ثم أعط جدول تغيرات f . 0.5

c- أنشيء $(\mathcal{C})$ في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$. 0.75

(نقبل أن $\mathcal{C}$ له نقطة انعطاف $A(\alpha,f(\alpha))$ حيث $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$.) .

الجزء B :

لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

1- أدرس تغيرات F على $\mathbb{R}$. 0.5

2 - a- تحقق ان $\forall t\in\mathbb{R}:\frac{1}{1+e^{t}}=1-\frac{e^{t}}{1+e^{t}}$ ، ثم احسب $\int_0^x\frac{1}{1+e^{t}}dt$. 0,5

b- باستعمال المكاملة بالاجزاء، استنتج حساب $F(x)$. 0.5

c- تحقق أن $F(x)$ تكتب على أحد الشكلين: 0.5

$$(1)\qquad F(x)=x-\ln(1+e^{x})-f(x)+2\ln 2$$

$$(2)\qquad F(x)=\ln\left(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)-f(x)+2ln2$$

3- حدد $\lim_{x\to+\infty}F(x)$. 0.25

4- حدد $\lim_{x\to-\infty}(F(x)-x)$ ، ثم أول النتيجة هندسيا. 0.5

الجزء C :

لتكن u_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب: $u_n=f(1)+f(2)+....+f(n)=\sum_{k=1}^{n}e^{-k}\ln(1+e^{k})$.

1- ادرس رتابة المتتالية (u_n) . 0.25

2 - a- بين أن : $f(k)\leq\int_{k-1}^{k}f(t)dt$: $1\leq k\leq n$ و $\forall k\in\mathbb{N}$. 0.25

b- قارن u_n و $F(n)$. هل u_n متتالية متقاربة ؟ 0.75

المستوى: الثانية علوم رياضية　　　　المادة: الرياضيات

التمرين الخامس (4 نقطة)

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نضع: $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي: $E=\{M(a,b)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1 - بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية. $0,75$

2 - بين أن لكل a,b,c,d من $\mathbb{R}$:

$$M(a,b).M(c,d)=M(ac-3bd,ad+bc-2bd).$$ 0.75

3 - نعتبر التطبيق $\varphi: \quad E^*\to\mathbb{C}^*$ حيث $\varphi(M(a,b))=(a-b)+ib\sqrt{2}$.

و $E^*=E\backslash\{M(0.0)\}$ و $i^2=-1$.

أ - بين أن φ تطبيق تقابلي و حدد تقابله العكسي φ^{-1} . 0.75

ب - نقبل أن E^* جزء مستقر من $(E,\times)$.

بين أن φ تشاكل من $(E^*,\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*,\times)$. 0.75

4 - بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي. 1

Très bonne chance!