

1/3	الصفحة	امتحان تجريبي (وطني) لسنة 2006-2005 ثانوية زينب النفزاوية. وجدة	المملكة المغربية
4س	مدة الإنجاز		وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي و تكوين الأطر والبحث العلمي
10	المعامل		المادة: الرياضيات الشعبة: العلوم الرياضية أ و ب

<u>التمرين الأول (8.5)</u>	
$g(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$ $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+e^x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$	<p>I- نعتبر الدالة <math>g</math> المعرفة على <math>\mathbb{R}^*</math> كما يلي : ادرس تغيرات <math>g</math> على <math>\mathbb{R}^*</math> و استنتج إشارتها.</p> <p>II- نعتبر الدالة <math>f</math> المعرفة على <math>\mathbb{R}</math> كما يلي:</p>
<p>1- أحسب النهايات <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)</math> و <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)</math></p>	<p>0.5</p>
<p>2- بين أن <math>f</math> متصلة في الصفر.</p>	<p>0.25</p>
<p>3- ادرس قابلية اشتقاق <math>f</math> في الصفر ثم أعط تاويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها.</p>	<p>0.75</p>
<p>4- بين أن <math>f</math> قابلة للاشتقاق على <math>\mathbb{R}^*</math> وأن <math>\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1+e^x\right)^2}</math></p>	<p>0.5</p>
<p>5- أعط جدول تغيرات <math>f</math>.</p>	<p>0.25</p>
<p>6- احسب <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)</math> واستنتج مقاربا مائلا ل <math>(Cf)</math> بجوار <math>\pm\infty</math>.</p>	<p>0.75</p>
<p>7- أنشئ <math>(Cf)</math> في معلم متعامد ممنظم <math>(\ i\  = \ j\  = 4cm.)</math>. نعطي <math>e \approx 2.71</math>, <math>\frac{1}{1+e} \approx 0.27</math>.</p>	<p>0.5</p>
<p>III- نعتبر الدالة <math>h</math> المعرفة على <math>[1, +\infty[</math> بما يلي: <math>h(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt</math></p>	<p>1- لتكن <math>F</math> دالة أصلية ل <math>f</math> على <math>\mathbb{R}</math>.</p>
<p>أ- باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية على <math>F</math> بين أن : <math>(\forall x \in [1, +\infty[) (\exists c \in [1, x^2]) / h(x) = (x^2 - 1)f(c)</math></p>	<p>0.5</p>
<p>ب- أثبت أنه لكل <math>x \in [1, +\infty[</math> لدينا : <math>(x^2 - 1)f(1) \leq h(x) \leq (x^2 - 1)f(x^2)</math> و استنتج <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)</math></p>	<p>0.5</p>
<p>ج- حدد <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}</math> و استنتج طبيعة الفرع اللانهائي ل <math>(Ch)</math> بجوار <math>+\infty</math>.</p>	<p>0.5</p>
<p>3- حدد الدالة المشتقة ل <math>h</math> وأعط جدول التغيرات.</p>	<p>0.5</p>
<p>4- أعط معادلة نصف المماس ل <math>(Ch)</math> عند النقطة <math>A(1, 0)</math> على اليمين.</p>	<p>0.25</p>
<p>5- أنشئ <math>(Ch)</math>.</p>	<p>0.5</p>

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{f(t)}{t^3} dt$$

IV- نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة كالتالي :

1- بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  تزايدية قطعاً.

0.25

$$u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^s}{1+e^s}\right) ds$$

2- أ- باستعمال مكاملة بتغيير المتغير بين أن

0.5

ب- أستنتج الحد العام ل  $(u_n)$  و حدد  $\lim u_n$ .

0.5

### التمرين الثاني (2.5)

في المستوى العقدي  $(P)$  المنسوب لمعلم متعامد منظم ومباشر  $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقيهما على التوالي a و 1 حيث  $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

لتكن F الدالة المعرفة على  $(P) \setminus \{B\}$  و التي تربط كل نقطة  $M(z)$  بالنقطة  $M'(z')$  حيث  $z' = \frac{z-a}{z-1}$

1- بين أنه إذا كانت  $M(z)$  صامدة ب F فإن z حل للمعادلة  $(G): z^2 - 2z + a = 0$

0.5

2- نفترض أن  $a = 1 + e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ . حدد حلي (G) ثم اكتبهما على الشكل المثلثي

0.5

3- في هذا السؤال نفترض أن  $a = -1$ . لتكن  $M(z)$  نقطة من المستوى حيث  $z \neq 1$  و  $M'(z')$  صورتها ب F.

أ- بين أن  $\overline{(e_1, BM)} + \overline{(e_1, BM')} \equiv 0[2\pi]$ .

0.5

ب- استنتج أن نصف المستقيم  $[BA)$  منصف الزاوية  $(\widehat{MBM'})$ .

0.25

ت- بين أن  $(|z|=1) \Leftrightarrow (z' \in i\mathbb{R})$ .

0.5

ث- استنتج طريقة إنشاء  $M'$  صورة النقطة M من الدائرة المثلثية محرومة من النقطة B.

0.25

### التمرين الثالث (2)

يحتوي كيس على n كرة بيضاء  $(n \geq 2)$ , 5 كرات حمراء و 3 خضراء. نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الكيس.

1- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين؟

0.5

2- نرمز ب  $p(n)$  لاحتفال الحصول على كرتين من نفس اللون.

$$p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$$

0.5

ب- احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$ , ثم أول النتيجة المحصل عليها.

0.5

3- ما هو احتمال الحصول على كرتين مختلفتي اللون علما أن الكرة الأولى حمراء؟

0.5

### التمرين الرابع (4.5)

نذكر أن  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة.

$$F = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a-b & -b \\ b+c & a-b \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

نعتبر المجموعة

1- بين أن $(F, +)$ زمرة جزئية ل $(M_2(\mathbb{R}), +)$ .	0.5
2- نضع $B = M(0,1,0)$ و $C = M(0,0,1)$ .	
أ- احسب $BC$ .	0.25
ب- هل $F$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ ؟ علل جوابك.	0.25
3- لتكن المجموعة $G = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ جزء من $F$ .	
أ- بين أن $G$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ .	0.5
ب- بين أن $(G, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدة.	0.5
4- نعتبر التطبيق $\phi: G \rightarrow \mathbb{C}$ حيث $\phi \left( \begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix} \right) = (a-b) + ib$ .	
أ- بين أن $\phi$ تشاكل تقابلي من $(G, \times)$ نحو $(\mathbb{C}, \times)$ , وحدد $\phi^{-1}$ .	1
ب- تحقق أن $\phi^{-1}$ أيضا تشاكل من $(\mathbb{C}, \times)$ نحو $(G, \times)$ وحدد $H = \phi^{-1}(\mathbb{C}^*)$ .	0.5
ت- استنتج بنية $(H, \times)$ .	0.5
ث- لتكن $M = \begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ مصفوفة من $H$ , حدد $M^{-1}$ باستعمال التشاكل $\phi$ .	0.5
<b>التمرين الخامس (2.5)</b>	
نعتبر المعادلتين التاليتين في $\mathbb{Z}^2$	
$(E): 2x + 5y = 1000$ و $(F): 2x^2 + 5y^2 = 1000$	0.5
1- حدد مجموعة حلول المعادلة $(E)$ .	
2- ليكن الزوج $(x_0, y_0)$ حل للمعادلة $(F)$ حيث $x_0$ و $y_0$ موجبين.	0.5
أ- بين أن $x_0$ مضاعف للعدد 5 و $y_0$ مضاعف للعدد 2.	0.25
ب- استنتج أن المعادلة $(F_1): 5x^2 + 2y^2 = 100$ تقبل حلا $(x_1, y_1)$ في $\mathbb{N}^2$ .	0.75
ت- بين أن $x_1 \equiv 0[2]$ و $y_1 \equiv 0[5]$ ثم استنتج أن المعادلة $(F_2): 2x^2 + 5y^2 = 10$ تقبل حلا $(x_2, y_2) \in \mathbb{N}^2$ .	0.25
ث- استنتج أن المعادلة $(F_3): 5x^2 + 2y^2 = 1$ تقبل حلا في $\mathbb{N}^2$ .	0.25
ج- ما هي إذن مجموعة حلول المعادلة $(F)$ ؟	

**حظ سعيد! Bonne chance!**