

A-S-A-M	الاختبار التجريبي في مادة الرياضيات دورة ابريل 2007-2006 المدة 4 ساعات	ع 2 ر	مؤسسة العراقية 2 للتربية و التعليم. ثانوية ابي العباس السبتى.
---------	---------------------------------------------------------------------------------	-------	------------------------------------------------------------------

التمرين 1 (2.75 نقطة)  
نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (1)  $4(y-1)^2 = 5x + 4$   
ليكن  $(x,y)$  حلا للمعادلة (1)  
ا- بين أن  $y \equiv 0 [5]$  أو  $y \equiv 2 [5]$  (0.75)  
ب- استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (1) هي:  
(0.5)  $S = \{(20k^2 - 8k, 5k) / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(20k^2 + 8k, 2 + 5k) / k \in \mathbb{Z}\}$ .  
ج- حدد  $x \wedge y$  القاسم المشترك الأكبر للعددين  $x$  و  $y$  بدلالة  $k$  في  $\mathbb{Z}^*$ . (1)  
(2) نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (2) الآتية:  $6x - 13y = 7$   
حدد في  $\mathbb{N}^2$  الحلول المشتركة للمعادلتين (1) و (2). (0.5)

التمرين 2 (4 نقاط) (3,75 نقطة)  
نضع  $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . ونعتبر القانون  $T$  المعرفة بمايلي:  
 $\forall (x,y) \in E; \forall (x',y') \in E \quad (x,y)T(x',y') = (xx', \sqrt[3]{xy'} + yx')$   
I. (1) بين أن القانون  $T$  تجميعي في  $E$ . (0.75)  
(2) تحقق أن  $(1,0)$  هو العنصر المحايد في  $(E,T)$ . (0.25)  
(3) بين أن  $(E,T)$  زمرة غير تبادلية. (1) (0,75)

II. لكل  $(x,y) \in E$  من  $E$  نضع  $M_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{x} & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$  ونعتبر المجموعة  $F = \{M_{(x,y)} / (x,y) \in E\}$   
(1) أبين أن  $M_{(x,y)} \times M_{(x',y')} = M_{(x,y)T(x',y')}$   $\forall (x,y) \in E; \forall (x',y') \in E$  (0.5)  $0,25$   
ب- استنتج أن  $(F,x)$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$  (0.25)  $0,5$   
 $h: (E,T) \dashrightarrow (F,x)$   
(2) نعتبر التطبيق:  
 $(x,y) \dashrightarrow M_{(x,y)}$   
أ- بين أن  $h$  تشاكل تقابلي من  $(E,T)$  نحو  $(F,x)$ . (0.5)  
ب- استنتج بنية  $(F,x)$  وأعط مقلوب  $M_{(x,y)}$  من  $F$ . (0.75)

التمرين 3 (3.75 نقطة) (4 نقطة)  
المستوى العقدي  $\mathbb{C}$  م-م-م  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . نعتبر التطبيق  $f$  المعرفة على بمايلي:  
 $\forall z \in \mathbb{C}^* : f(z) = \frac{\bar{z} + i}{z}$   
الجزء A  
(1) حدد مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  والتي من اجلها يكون  $|f(z)| = 1$ . (0.25)  
(2) أ- حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $z\bar{z} = \frac{1}{z}$  (0.5)  
ب- ليكن  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة. حدد حسب قيم  $n$  في  $\mathbb{Z}$  الشكل المثلي للعدد العقدي  $z_1^n + z_2^n$ . (0.75)

### التمرين 3 (4نقطة)

المستوى العقدي م-م-م  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . نعتبر التطبيق  $f$  المعروف على بمايلي:  $\forall z \in \mathbb{C}^* : f(z) = \frac{\bar{z} + i}{z}$

الجزء A

(1) حدد مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  والتي من اجلها يكون  $|f(z)| = 1$  . (0.25)

(2) أ- حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $f\left(\frac{1}{z}\right) = z\bar{z}$  . (0.5)

ب- ليكن  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة . حدد حسب قيم  $n$  في الشكل المثلثي للعدد العقدي  $z_1^n + z_2^n$  . (0.75)

الجزء B

لتكن  $(H) = \{M(z)/f(z) \in i\mathbb{R}\}$  المجموعة المعرفة بمايلي

(1) بين أن معادلة ديكرتية ل  $(H)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  هي  $x^2 - y^2 + y = 0$  (0.5)

(2) أبين أن  $(H)$  مخروطي محددًا طبيعته. (0.25)

ب- حدد تباعده المركزي و بؤرتيه . (0.5)

ج- أنشئ  $(H)$  . (0.5)

(3) لتكن  $(H')$  مجموعة النقط  $M(z)$  التي لحقها  $z = x + iy$  ،  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  بحيث

$$\begin{cases} x = \frac{e^t - e^{-t}}{4} \\ y = \frac{e^t + e^{-t} + 2}{4} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أبين أن  $(H') \subset (H)$  (0.5)

ب- هل لدينا  $(H) = (H')$  علل جوابك (0.25)

### التمرين 4

الجزء 1 (2.25نقطة)

لتكن  $f$  الدالة المعرفة بمايلي:  $f(x) = \frac{x}{x^2 - \ln x}$  ،  $x > 0$   
 $f(0) = 0$

(1) بين أن:  $\forall x \in ]0, +\infty[ : x^2 - \ln x > 0$  (0.5)

(2) ادرس اشتقاق  $f$  عند 0 (0.25)

(3) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  وحدد الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C_f)$  (0.5)

(4) ادرس تغيرات الدالة  $f$  على كل من المجالين  $]0, 1]$  و  $[1, +\infty[$  . (0.5)

(5) أنشئ  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  . (0.5)

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}, x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن  $n$  في  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ . نعتبر الدالة  $f_n$  المعرفة بمايلي:

$$(1) \quad \forall x \in ]0, +\infty[ : x^n - \ln x > 0 \quad (0.25)$$

$$(2) \quad \text{ادرس اتصال و اشتقاق } f_n \text{ عند } 0 \text{ على اليمين.} \quad (0.5)$$

$$(3) \quad \text{لتكن } g_n \text{ الدالة المعرفة بمايلي } g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln x \text{ حيث } x \text{ في } ]0, +\infty[$$

$$\text{أ- بين أن } g_n \text{ تناقصية قطعا على } ]0, +\infty[ \quad (0.25)$$

$$\text{ب- استنتج أن المعادلة } g_n(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha_n \text{ وان } 0 < \alpha_n \leq 1. \quad (0.75)$$

$$\text{ج- بين أن } \forall n \geq 2 : \frac{1}{n-1} \leq (\alpha_n)^n \leq 1 \quad (0.5)$$

$$\text{د- استنتج } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \quad (0.5)$$

$$\text{هـ- حدد إشارة } g_n(x) \text{ لكل } x \text{ من } ]0, +\infty[. \quad (0.25)$$

$$(4) \quad \text{أ- بين أن : } f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2} \quad \forall x \in ]0, +\infty[ \quad (0.5)$$

$$\text{ب- ضع جدول تغيرات } f_n \quad (0.5)$$

## الجزء 3 (نقطة 3.25)

$$\forall x > 0, F(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} dt$$

لتكن  $F$  الدالة المعرفة بمايلي

$$(1) \quad \text{أ- بين أن } F(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dx \quad \forall x \in ]0, +\infty[ \quad (0.5)$$

$$\text{ب- استنتج أن } F \text{ تناقصية قطعا على } ]0, +\infty[ \quad (0.5)$$

$$(2) \quad \text{أ- بين أن } \forall x > 0 : F(x) \geq \int_0^1 \frac{dt}{t+x} \quad (0.25)$$

$$\text{ب- استنتج } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \quad (0.5)$$

$$\text{ج- بين أن } \forall x > 0 : \frac{e-1}{x+1} \leq F(x) \leq \frac{e-1}{x} \quad (0.5)$$

$$\text{د- استنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \quad (0.25)$$

$$(3) \quad \text{بين أن } F \text{ قابلة للاشتقاق على } ]0, +\infty[ \text{ واحسب } F'(x) \text{ لكل } x \text{ من } ]0, +\infty[. \quad (0.75)$$