نيابة القنيطرة الثانوية التأهلية سيدي عيسى	الامتحان التجريبي للباكالوريا 2007/04/27 مادة الرياضيات الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية A	المدة: 4 ساعات المعامل : 10

التمرين الأول (6 نقط)

ليكن F التطبيق من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف كالتالي :

$$F(z)=2z^2-2(\cos\theta+i\sin\theta)z-\sin\theta(\sin\theta-i\cos\theta) \quad \text{حيث} \quad \theta\in[0,2\pi[$$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $F(z)=0$ — 1

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$, نضع $z=x+iy$ حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$ و لتكن النقطة M التي لحقها z .

a) احسب بدلالة x و y و θ كل من الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي ل $F(z)$ — 1

b) لتكن (Γ_θ) مجموعة النقط بحيث يكون $F(z)$ تخيليا صرفا .اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ_θ) — 1

c) بين أن (Γ_θ) مخروطي محددا طبيعته و مركزه Ω_θ — 1

d) حدد مجموعة النقط Ω_θ عندما يتغير θ على $[0,2\pi[$ — 1

e) أرسم $\left(\Gamma_{\frac{3\pi}{4}}\right)$ ثم حدد عناصره المميزة — 1

التمرين الثاني (4 نقط)

الجزأين I و II مستقلين

I. ليكن a عددا طبيعيا بحيث $a\geq 2$. و m و q و r أعداد طبيعية

1) تحقق من أن $a^{mq+r}-1=\left[\left(a^m\right)^q-1\right]a^r+\left(a^r-1\right)$ — 0.25

2) بين أن كل قاسم مشترك للعددين a^m-1 و $a^{mq+r}-1$ يقسم a^r-1 — 0.75

3) استنتج التكافؤ : $a^m-1 \;/\; a^n-1 \Leftrightarrow m/n$ (الرمز / يعني يقسم) — 0.75

II. ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 7 نضع : $n=p^4-1$

1) بين أن 3 يقسم n — 0.25

2) بين أنه يوجد k من $\mathbb{N}$ بحيث : $p^2-1=4k(k+1)$ ؛ ثم استنتج أن 16 يقسم n — 0.75

3) بين أن 5 يقسم n ؛ ثم استنتج أن n قابل للقسمة على 240 — 0.5

4) هل توجد أعداد أولية p_1 و p_2 و .... و p_{15} أكبر من أو تساوي 7 بحيث يكون العدد $A=p_1^4+p_2^4+...+p_{15}^4$ أوليا ؟ — 0.75

التمرين الثالث (8.5 نقط)

لتكن $M_3(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات من الرتبة 3 التي معاملاتها أعداد حقيقية و E الجزء منه المعرف كالتالي :

$$E=\left\{M_{(a,b,c)}=\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & a+c & b\\ c & b & a\end{pmatrix} / (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

1) بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي — 1.5

2) نضع : $I=M_{(1.0,0)}$ و $J=M_{(0,1,0)}$ و $K=M_{(0,0,1)}$ بين أن الأسرة $B=(I,J,K)$ أساس في $(E,+,.)$ استنتج بعد E 3) أحسب $J\times K$ و $K\times J$ و J^2 و K^2 4) بين أن E جزء مستقر بالنسبة لضرب المصفوفات في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ و أن : $(E,+,\times)$ حلقة واحديه , هل هي تبادلية ؟ هل هي كاملة؟ 5) نعتبر المصفوفة : $P=M_{(1,0,-3)}$ a) أحسب P^2 ؛ ثم استنتج علاقة بين P و P^2 و I b) بين أن P تقبل مقلوب في $(E,+,\times)$ ثم استنتج P^{-1} 6) حساب P^n a) حدد a و b بحيث : $X^n=Q(X)(X-4)(X+2)+ax+b$ (ليس مطلوب تحديد الحدودية $Q(X)$) b) استنتج P^n بدلالة P و I و n حيث $n\in\mathbb{N}$	0.5 1 1.5 1.5 1 0.5 1
التمرين الرابع (6.5 نقط) لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $u_n=\int_0^1\frac{dt}{1+t+t^n}$ و $u_0=\int_0^1\frac{dt}{2+t}$ 1) تحقق من وجود u_n 2) احسب u_0 ثم u_1 3) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية 4) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):u_n\leq\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$ ثم احسب $\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$ ماذا تستنتج ؟ 5) تحقق من أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ln 2-u_n=\int_0^1\frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}dt$ ثم استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}):\ln 2-u_n\leq\frac{1}{n+1}$ حدد نهاية (u_n)	0.5 1.5 0.5 1.5 2.5
التمرين الخامس (15 نقطة) الجزء الأول 1) نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $u(x)=(2-x)e^x-2$ a) ادرس تغيرات الدالة u b) بين أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$ نرمز ب : α للحل الغير منعدم ثم تحقق أن $1<\alpha<2$ c) استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$ 2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{e^x-1} & x\neq 0 \\ f(0)=0 & \end{cases}$ و لتكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.	0.5 1 0.5 1

a) بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ ؛ ثم ادرس قابلية اشتقاق f في 0 و أول هندسيا النتيجة المحصل عليها	0.5
b) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن :	0.5
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right) : f'(x) = \frac{x.u(x)}{\left(e^x - 1\right)^2}$$	1
c) بين أن : $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$	0.5
d) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ و $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ و استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .	0.5
e) ادرس تغيرات الدالة f	
f) أنشئ (C) منحنى الدالة f (نأخذ $\alpha \simeq 1.6$)	
الجزء الثاني	
نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$	0.5
1) بين أن F متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$	
2) لكل $x \in \mathbb{R}^+$ نضع : $G(x) = \int_{\ln 2}^x t^2 e^{-t} dt$	1
a) باستعمال مكاملة بالأجزاء احسب : $G(x)$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} G(x)$	0.5
b) بين أن : $\forall t \in \left[\ln 2, +\infty\right[: f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$	0.5
c) استنتج أن : F دالة مكبورة على $\mathbb{R}^+$	
d) نقبل أن F تقبل نهاية في $+\infty$ بين أن هذه النهاية منتهية , نضع $L = \lim_{x\to+\infty} F(x)$	
الجزء الثالث	
في كل ما يلي n عدد طبيعي غير منعدم .	1
1) :	
a) بين أن لكل $x > 0$ لدينا :	
$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ... + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$	0.5
b) بين أن : لكل $x > 0$ $\quad 0 \leq \int_0^x f\left(t\right) dt \leq \frac{\alpha\left(2-\alpha\right)}{n}$	0.5
c) أحسب : $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$ لكل $x \geq 0$	0.5
d) استنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} I_n(x) = \frac{2}{n^3}$	0.5
2) :	
a) بين أن لكل $x \geq 0$ $\quad F(x) = \sum_{k=1}^{k=n} I_k\left(x\right) + \int_0^x f\left(t\right).e^{-nt} dt$	0.5

b) نعتبر الدالة h_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب $h_n(x)=\int_0^x f(t).e^{-nt}dt$ بين أن الدالة h_n تقبل النهاية L_n عندما يؤول x إلى $+\infty$ و أن $L-L_n=2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{n^3}\right)$: .	1
c) باستعمال س الجزء الثالث b-1 بين أن المتتالية : $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n=0$	1
d) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب : $u_n=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{n^3}$ بين أن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و نهايتها L' تحقق : $L=2L'$	1