1/3	الصفحة	الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا - دورة أبريل 2007-	
4 ساعات	مدة الإنجاز	الشعبة : العلوم الرياضية أ و ب	المادة : الرياضيات
10	المعامل	الأستاذ : محمد غريز	المؤسسة : معهد نور الرشاد

التمرين الأول

في نظمة العد للأساس n $(n\geq 6)$

نعتبر العددين $a=\overline{2310}_{(n)}$ و $b=\overline{252}_{(n)}$

1 - أ - بين أن $2n+1$ يقسم a و b — 0.75

ب - ليكن $d=a\wedge b$ — 0.75

لمزيد من دروس و تمارين و امتحانات ... موقع قلمي

بين أن $d=2n+1$ أو $d=2(2n+1)$

ادرس الحالتين n زوجي و n فردي.

2 - نأخذ $n=6$ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $ax+by=-26$ — 1

التمرين الثاني

ليكن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ إلى $(\mathbb{R}^*,\times)$

I) $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

نعرف قانون التركيب الداخلي $*$ في E بما يلي :

$(x,y)*(x',y')=(xx',\varphi(x)y'+x'y)$

1 - بين أن القانون $*$ تجميعي . — 0.5

2 - تحقق أن $(1,0)$ هو العنصر المحايد في $(E,*)$. — 0.25

3 - بين أن $(E,*)$ زمرة. — 0.5

4 - بين أن $(E,*)$ زمرة تبادلية إذا و فقط إذا كان لكل x من $\mathbb{R}^*$ $\varphi(x)=x$ — 0.5

II) لكل (x,y) من E

نضع $M(x,y)=\begin{pmatrix}\varphi(x) & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$

ليكن $D=\{M(x,y)\in M_2(\mathbb{R})/(x,y)\in E\}$

1 - بين أن لكل (x,y) من E و (x',y') من E — 0.5

$M(x,y)\times M(x',y')=M(x,y)*(x',y')$

2 - بين أن $(D,\times)$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$. — 0.5

3 - نعتبر التطبيق $\phi:E\to D$

$(x,y)\to M(x,y)$

أ - بين أن ϕ تشاكل تقابلي من $(E,*)$ نحو $(D,\times)$ — 0.5

ب - استنتج بنية $(D,\times)$. — 0.25

ج - حدد المصفوفة المقلوبة للمصفوفة $M(x,y)$ — 0.5

التمرين الثالث

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$.

ليكن z عددا عقديا بحيث $z\neq i$

نعتبر العدد العقدي $z'=i\dfrac{z+i}{z-i}$

لتكن M نقطة من (P) لحقها z و M' نقطة لحقها z'.

1 - بين أن $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z' \in i\mathbb{R}$	0.5
2 - أ - بين أن $\lvert z\rvert = 1 \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}$	0.5
ب - استنتج مجموعة النقط M بحيث $z' \in \mathbb{R}$	0.5
3 - أ - بين أن لكل z من $\mathbb{C} - \{-i, i\}$ $\quad \arg z' \equiv \dfrac{\pi}{2} + \arg\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)[2\pi]$	0.5
ب - استنتج مجموعة النقط M بحيث $z' \in \mathbb{R}^{*+}$	0.5
4 - لتكن (C) الدائرة التي مركزها $A(i)$ و شعاعها r .	
أ - تحقق أن $z' - i = \dfrac{-2}{z-i}$ $\quad (\forall z \in \mathbb{C} - \{i\})$	0.25
ب - استنتج انه عندما تتغير M على الدائرة (C) فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يتم تحديدها.	0.5
5 - ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $(n \geq 2)$ نعتبر المعادلة $(E): z'^n = i^n$	
أ - بين أن $(E) \Leftrightarrow (z+i)^n = (z-i)^n$	0.25
ب - استنتج أن صور حلول المعادلة (E) مستقيمية	0.5
ج - بين أن حلول المعادلة (E) تكتب على شكل : $z_k = \cot an\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \qquad k \in \{1, 2, ...n-1\}$	0.5
التمرين الرابع	
A - 1 - بين أن $\displaystyle\int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} e^t\, dt = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R})$	0.5
2 - استنتج أن $e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} \geq 0$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$	0.25
3 - بين أن $\displaystyle\int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} e^t\, dt \leq e^x \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} dt$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$	0.25
4 - أ - احسب بدلالة x $\displaystyle\int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} dt$ و استنتج $e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} \leq \dfrac{x^3 e^x}{6}$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$	0.75
ب - بين أن $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$	0.25
B - لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $g(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{e^x - 1} - \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$	
1 - تحقق أن $g'(x) = \dfrac{1}{x(e^x-1)^2} h(x)$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^*)$ حيث $h(x) = e^{2x} - x^2 e^x - 2e^x + 1$	0.75
2 - بين أن الدالة h تزايدية على $\mathbb{R}^+$ (يمكن استعمال س 2) من A)	0.75
3 - بين أن $h(x) \geq 0$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$	0.5
4 - أ - استنتج أن $g'(x) \geq 0$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$	0.5
ب - تحقق أن $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} g(x) = 0$ و استنتج أن $g(x) \geq 0$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$.	0.5

C - لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ليكن (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{j}\| = 6\|\vec{i}\| = 6cm$

1 - بين أن $f(x)+f(-x)=1 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$ و اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة — 1

2 - أ - بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$ — 0.75

ب - تحقق أن $f(x) = \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} \times \frac{e^x-1-x}{x^2} \quad (\forall x\in\mathbb{R}^*)$ حيث $u(x) = \frac{e^x-1-x}{x}$ — 0.5

ج - استنتج أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} f(x) = \frac{1}{2}$ — 0.25

3 - بين أن $f'(x) = \frac{1}{x^2} g(x) \quad (\forall x\in\mathbb{R}^*)$ — 0.5

4 - نقبل أن $f'(0) = \frac{1}{24}$ و أن $f''(x) \prec 0 \quad (\forall x\in\mathbb{R}^{*+})$

أ - بين أن f تزايدية على $\mathbb{R}$ — 0.5

ب - انشىء المنحنى (C_f). — 0.75