1/3	الصفحة	**الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا** - دورة أبريل **2006**	
4 ساعات	مدة الإنجاز	**الشعبة : العلوم الرياضية أ و ب**	**المادة : الرياضيات**
10	المعامل	**الأستاذ : محمد غريز**	**المؤسسة : معهد نور الرشاد**

التمرين الأول

نعتبر المعادلة $(E): x^2-5y^2=1$

x و y عددين صحيحين طبيعيين

1 - نفترض أن الزوج (x_0,y_0) حلا للمعادلة (E)

أ - بين أن x_0 و y_0 أوليان فيما بينهما. 0.25

ب - بين أن x_0 و y_0 ليس لهما نفس الزوجية. 0.25

ج - بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث: $x_0=5k+1$ أو $x_0=5k-1$ 0.25

2 - احسب $1+5y^2$ لكل $1\le y\le 4$ 0.25

و استنتج زوجا (x_0,y_0) حلا للمعادلة (E). 0.25

3 - لكل n من $\mathbb{N}^*$ نفترض وجود زوج (a_n,b_n) من $\mathbb{N}^{*2}$

بحيث $a_n+b_n\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})^n$

أ - احسب a_1 و b_1 0.25

ب - حدد a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n 0.5

ج - بين أن الزوج (a_n,b_n) حلا للمعادلة (E) لكل $n\ge 1$ 0.5

د - بين أن $(9-4\sqrt{5})^n=a_n-b_n\sqrt{5}$ 0.5

ه - استنتج a_n و b_n بدلالة n 0.5

التمرين الثاني

يتمرن حارس لكرة القدم على التصدي للرميات الحرة المباشرة

إذا تصدى الحارس للرمية رقم n فإن الاحتمال لكي يتصدى للرمية n+1 هو 0.8

إذا لم يتصدى الحارس للرمية رقم n فإن الاحتمال لكي يتصدى للرمية n+1 هو 0.6

الاحتمال لكي يتصدى للرمية الأولى هو 0.7

ليكن A_n : الحدث يتصدى حارس المرمى للرمية رقم n.

1 - أ - لكل $(n\geq1)$ حدد $P_{A_n}(A_{n+1})$ و $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$ 0.25

ب - ليكن P_n احتمال الحدث A_n

حدد $P(A_{n+1}\cap A_n)$ و $P(A_{n+1}\cap \overline{A_n})$ بدلالة P_n 0.5

2 - بين أن $P_{n+1}=\frac{1}{5}P_n+\frac{3}{5}$ 0.75

3 - نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بما يلي : $U_n=P_n-\frac{3}{4}$ $(n\geq1)$

أ - بين أن (U_n) متتالية هندسية 0.5

ب - حدد P_n بدلالة n. 0.5

ج - احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ 0.25

التمرين الثالث

I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E_n): z^n = (iz+2i)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

1 - أ - حدد الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_2) $(\mathrm{Im}(z_1) \succ 0)$	0.5
ب - لكل p من $\mathbb{N}$ نضع $U_p = z_1^p + z_2^p$.	
بين أن $U_p = 2(\sqrt{2})^p \cos\frac{3p\pi}{4}$	0.5
ج - استنتج قيم p بحيث يكون $U_p = (\sqrt{2})^{p+1}$	0.5
2 - نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين $A(-2)$ و $M(z)$ $(z \in \mathbb{C})$	
أ - بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (E_n) فإن $OM = AM$	0.5
ب - استنتج أن جميع حلول المعادلة (E_n) تكتب على شكل $-1+\lambda i$ $(\lambda \in \mathbb{R})$	0.5
3 - أ - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_n).	0.5
ب - بين أن حلول المعادلة (E_n) تكتب على شكل $z_k = -1 + i\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n})$ $k \in \{0,1,2,..........n-1\}$	0.75
II) لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نضع $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix}$	
نعتبر المجموعة $E = \{M(a,b)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$	
1 - أ - بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية.	0.25
ب - بين أن $J^2 = 2J - 5I$ و استنتج أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$	0.75
ج - بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية.	0.25
د - بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.	0.25
2 - أ - بين أن لكل α من $\mathbb{R}$ و لكل $M(a,b)$ من E $\alpha.M \in E$	0.25
ب - بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$	0.5
ج - حدد أساسا للفضاء المتجهي E و استنتج $\dim E$	0.5
3 - ليكن $(\mathbb{C},+,.)$ فضاء متجهي بعده 2.	
أ - بين أن $(1,1+2i)$ أساس للفضاء المتجهي $\mathbb{C}$.	0.25
ب - استنتج أن كل عدد عقدي يكتب بكيفية وحيدة على شكل $a+b(1+2i)$.	0.25
ج - ليكن $z = a+b(1+2i)$ نعتبر التطبيق $\varphi: \mathbb{C} \to E$ $z \to \varphi(z) = M(a,b)$	
بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(E,+)$.	0.5
د - بين أن لكل z و z' من $\mathbb{C}$ $\varphi(z.z') = \varphi(z).\varphi(z')$	0.25
4 - أ - بين أن $\varphi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$	0.25
ب - بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ $\left[\varphi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\right]^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} & \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} \\ -\frac{5}{2}\sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$	0.75

<u>التمرين الرابع</u>

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,1]$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{t-1}{\ln t} ; t\in]0,1[\\ f(0)=0, f(1)=1 \end{cases}$$

I) 1 - بين أن الدالة f متصلة في 0 و 1.	0.25
2 - حدد الدالة المشتقة للدالة f على $]0,1[$ و ادرس إشارتها.	0.5
3 - ادرس قابلية اشتقاق f في 0.	0.25
4 - أ - بين أن $0\le \dfrac{1}{1-u}-(1+u)\le 2u^2$ لكل u من $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$	0.5
استنتج أن $0\le -\ln(1-u)-(u+\dfrac{u^2}{2})\le 2\dfrac{u^3}{3}$ لكل u من $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$	0.5
ب - لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0,1]$ ب $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$	
بين أن $0\le g(1+h)-g(1)+\dfrac{h}{2}\le 2\dfrac{h^2}{3}$ لكل h من $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$	1
ثم استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق في 1 و احسب $g'(1)$	0.5
ج - استنتج أن f قابلة للاشتقاق في 1 و احسب $f'(1)$	0.5
II) من أجل x في $]0,1[$ نضع $\mathbf{I(x)=\int_x^1 f(t)dt}$ و $J(x)=\int_x^1 \dfrac{f(t)}{t}dt$	
1 - لتكن φ الدالة المعرفة على المجال $]0,1[$ ب :	
$\varphi(x)=J(x^2)-J(x)$	
أ - بين أن φ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و أن $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}(f(x)-2f(x^2))$	0.5
ب - بين أن $f(x)-2f(x^2)=-xf(x)$ لكل x من $]0,1[$	0.5
ج - استنتج أن $I(x)=\int_{x^2}^{x}\dfrac{t-1}{t\ln t}dt$ لكل x من $]0,1[$	0.5
2 - بين أن $\int_{x^2}^{x}\dfrac{-1}{t\ln t}dt=\ln 2$ لكل x من $]0,1[$	0.5
3 - بين أن $\left\|\int_{x^2}^{x}\dfrac{1}{\ln t}dt\right\|\le\dfrac{-x}{\ln x}$ لكل x من $]0,1[$	0.75
4 - استنتج $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} I(x)$	0.5
5 - نضع $I=\int_0^1 f(t)dt$ بين أن $0\le I-I(x)\le x$ لكل x من $]0,1[$	1
6 - استنتج أن $I=\ln 2$	0.5