

التمرين 1

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2; \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad (a,b) * (x,y) = \left(\frac{ax+by}{2}, \frac{ay+bx}{2} \right)$$

$$E = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 / m \in \mathbb{R}^* \right\}$$

(1) ليكن $X(m) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right)$ و $X(n) = \left(n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n} \right)$ عنصرين من المجموعة E ؛ إذن $m \in \mathbb{R}^*$ و $n \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} X(m) * X(n) &= \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) * \left(n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n} \right) \quad \text{لدينا :} \\ &= \left(\frac{\left(m + \frac{1}{m} \right) \left(n + \frac{1}{n} \right) + \left(m - \frac{1}{m} \right) \left(n - \frac{1}{n} \right)}{2}, \frac{\left(m + \frac{1}{m} \right) \left(n - \frac{1}{n} \right) + \left(m - \frac{1}{m} \right) \left(n + \frac{1}{n} \right)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{mn + \frac{m}{n} + \frac{n}{m} + \frac{1}{mn} + mn - \frac{m}{n} - \frac{n}{m} + \frac{1}{mn}}{2}, \frac{mn - \frac{m}{n} + \frac{n}{m} - \frac{1}{mn} + mn + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} - \frac{1}{mn}}{2} \right) \\ &= \left(mn + \frac{1}{mn}, mn - \frac{1}{mn} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{X(m) * X(n) = X(mn)}$$

وبما أن $m \in \mathbb{R}^*$ و $n \in \mathbb{R}^*$ فإن $mn \in \mathbb{R}^*$ وعليه فإن $X(m) * X(n) \in E$.
وبالتالي فإن $\forall (X, Y) \in E^2; X * Y \in E$. إذن $*$ قانون داخلي في المجموعة E .

$$\varphi: \mathbb{R}^* \rightarrow E$$

$$m \mapsto \varphi(m) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \quad \text{لدينا (2)}$$

(أ)

i. ليكن $(m, n) \in \mathbb{R}^{*2}$ ، لدينا $\varphi(mn) = \left(mn + \frac{1}{mn}, mn - \frac{1}{mn} \right) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) * \left(n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n} \right) = \varphi(m) * \varphi(n)$.

إذن φ تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E, *)$. $\forall (m, n) \in \mathbb{R}^{*2} : \varphi(mn) = \varphi(m) * \varphi(n)$

ii. ليكن $X \in E$ ، إذن $X = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right)$ ؛ ومنه $\exists! m \in \mathbb{R}^* / X = \varphi(m)$ ؛ وعليه فإن φ تقابل من \mathbb{R}^* نحو E .

وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E, *)$.

(ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E, *)$ وأن (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية، فإن $(E, *)$ زمرة تبادلية.

لدينا 1 هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون \times في (\mathbb{R}^*, \times) ، ومنه فإن العنصر المحايد بالنسبة للقانون $*$ في $(E, *)$ هو $\varphi(1) = (2, 0)$.

ليكن $\varphi(m) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right)$ عنصرا من E . مماثل $\varphi(m)$ بالنسبة للقانون $*$ في $(E, *)$ هو :

$$\left(m \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{m} \neq 0 \right) \cdot \left(\varphi(m) \right)' = \varphi(m^{-1}) = \varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\frac{1}{m}}, \frac{1}{m} - \frac{1}{\frac{1}{m}} \right) = \left(\frac{1}{m} + m, \frac{1}{m} - m \right)$$

(3) نعتبر المجموعة $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 2 \text{ و } y^2 = x^2 - 4\}$

أ) نضع : $G = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0 \right\}$. لنبين أن : $F = G$ ؟

$G \subset F$: ليكن $X = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in G$, إذن $m > 0$. لدينا :

$$\left(m + \frac{1}{m} \right)^2 - 4 = m^2 + 2 + \frac{1}{m^2} - 4 = m^2 - 2 + \frac{1}{m^2} = \left(m - \frac{1}{m} \right)^2$$

$$m + \frac{1}{m} \geq 2\sqrt{m \times \frac{1}{m}} \Rightarrow \boxed{m + \frac{1}{m} \geq 2} \quad \text{تذكير : } \boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+ : a + b \geq 2\sqrt{ab}} \quad \text{تطبيق .}$$

وبناء على ما سبق , نجد : $X \in F$. ومنه نستنتج أن $G \subset F$.

$F \subset G$: ليكن $(x, y) \in F$, إذن : $x \geq 2$ و $y^2 = x^2 - 4$. نبحث عن $m > 0$ بحيث : $(x, y) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right)$ ؟

$$(x, y) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} m + \frac{1}{m} = x \\ m - \frac{1}{m} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = x + y \\ \frac{2}{m} = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x + y}{2} \\ m = \frac{2}{x - y} \end{cases}$$

$$y^2 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow (x + y)(x - y) = 4 \Rightarrow \frac{x + y}{2} = \frac{2}{x - y} \quad (\text{لأن } x \neq y)$$

$$\text{من أجل } m = \frac{x + y}{2} \text{ , لدينا : } (x, y) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \text{ . لنبين أن : } m > 0$$

لدينا $4 > 0 = (x + y)(x - y)$, إذن $x + y$ و $x - y$ لهما نفس الإشارة . ولدينا $x \geq 2 > 0$. إذن :

$$y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq x > 0 \quad \text{و} \quad y \leq 0 \Rightarrow -y \geq 0 \Rightarrow x - y \geq x > 0 \Rightarrow x + y > 0 \quad \text{ومنه فإن : } m = \frac{x + y}{2} > 0$$

إذن $(x, y) \in G$. ومنه نجد : $F \subset G$.

وبالتالي فإن : $F = G$.

ب) لدينا : i . $F = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0 \right\} \subset E$.

ii . $F \neq \emptyset$ لأن من أجل $m = 1$, لدينا : $(2, 0) \in F$.

iii . ليكن $X = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right)$ و $Y = \left(n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n} \right)$ عنصرين من المجموعة F . إذن :

$$\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{n} > 0 \quad \text{و} \quad X * Y' = \varphi(m) * \varphi(n)' = \varphi(m) * \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}, \frac{m}{n} - \frac{n}{m} \right)$$

$$\boxed{\forall (X, Y) \in F^2 : X * Y' \in F} \quad \text{ومنه فإن : } X * Y' \in F$$

وبالتالي فإن : $(F, *)$ زمرة جزئية من $(E, *)$.

التمرين 2 :

I . عدد صحيح طبيعي أولي و $p \geq 5$.

(1) لدينا p أولي و $p \geq 5$ و 3 أولي إذن $3 \wedge p = 1$ (و 3 أوليان فيما بينهما) ومنه $3 \wedge p^2 = 1$ وعليه فإن : $p \not\equiv 0[3]$.

ومنه نستنتج أن : $p \equiv 1[3]$ أو $p \equiv 2[3]$. ندرس هاتين الحالتين :

i . إذا كان $p \equiv 1[3]$, فإن : $p^2 \equiv 1[3]$. ii . إذا كان $p \equiv 2[3]$, فإن : $p^2 \equiv 4[3]$. إذن $p^2 \equiv 1[3]$.

وبالتالي فإن : $\boxed{p^2 \equiv 1[3]}$.

(2) أ) لدينا p عدد صحيح طبيعي أولي و $p \geq 5$, إذن p عدد فردي ومنه $\exists q \in \mathbb{Z} / p = 2q + 1$ ومنه

$$p^2 = (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q(q + 1) + 1 \quad \text{إذن : } \boxed{p^2 - 1 = 4q(q + 1)}$$

ب) لدينا q و $q + 1$ عدنان صحيحان طبيعيين متتابعان , إذن $q(q + 1)$ عدد صحيح طبيعي زوجي . ومنه

$$p^2 \equiv 1[8] \quad ; \quad \text{ومنه نجد} \quad : \quad p^2 - 1 = 8k \quad ; \quad \exists k \in \mathbb{N} / q(q+1) = 2k$$

$$(3) \text{ خاصية: } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ أعداد نسبية. لدينا: } \begin{cases} a/c \\ b/c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/c$$

برهان: لدينا $a/c \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} / c = am$ و $b/c \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / c = bn$ و $a \wedge b = 1 \stackrel{\text{Bezout}}{\Rightarrow} \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$

إذن: $ab/c \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / c = bn$ و $a \wedge b = 1$ ومنه نستنتج أن: ab/c

ملاحظة: الخاصية ليست صحيحة إذا كان $a \wedge b \neq 1$. مثال مضاد: 2 يقسم 12 و 4 يقسم 12 لكن $8 = 2 \times 4$ لا يقسم $2 \wedge 4 = 2$.

تطبيق: لدينا $p^2 \equiv 1[3]$ و $p^2 \equiv 1[8]$ إذن $3/(p^2-1)$ و $8/(p^2-1)$ و $3 \wedge 8 = 1$ إذن $24 = 3 \times 8 / (p^2-1)$ أي $p^2 \equiv 1[24]$

II ليكن a عددا صحيحا طبيعيا حيث: $a \wedge 24 = 1$

(1) لدينا $a \wedge 24 = 1$, إذن a عدد صحيح طبيعي فردي (لو كان a زوجيا لكان 2 قاسما مشتركا لـ a و 24 وهذا يتناقض مع $a \wedge 24 = 1$) ومنه نستنتج أن: $a^2 \equiv 1[8]$ (اتبع نفس خطوات السؤالين I-2 أو I-2-ب).

ولدينا $a \wedge 24 = 1$, إذن $a \not\equiv 0[3]$ (لو كان $a \equiv 0[3]$ لكان 3 قاسما مشتركا لـ a و 24 وهذا يتناقض مع $a \wedge 24 = 1$).

إذن $a \equiv 1[3]$ أو $a \equiv 2[3]$. إذن $a \equiv 1[3] \Rightarrow a^2 \equiv 1[3]$ و $a \equiv 2[3] \Rightarrow a^2 \equiv 4[3] \Rightarrow a^2 \equiv 1[3]$

لدينا $a^2 \equiv 1[8]$ و $a^2 \equiv 1[3]$ و $3 \wedge 8 = 1$ ؛ إذن: $a^2 \equiv 1[24]$

(ب) نفترض أنه توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 و a_2 و ... و a_{23} حيث: $\forall k \in \{1, \dots, 23\} : a_k \wedge 24 = 1$

$$\text{و } a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997$$

لدينا $a_k \wedge 24 = 1 \quad ; \quad \forall k \in \{1, \dots, 23\} : a_k^2 \equiv 1[24]$ إذن $a_k^2 \equiv 1[24]$ ومنه فإن: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 \equiv 23[24]$

ولدينا $23997 \equiv 21[24]$. إذن: $23 \equiv 21[24]$ أي $2 \equiv 0[24]$ وهذا تناقض!

خلاصة: لا توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 و a_2 و ... و a_{23} حيث: $\forall k \in \{1, \dots, 23\} : a_k \wedge 24 = 1$

$$\text{و } a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997$$

التمرين 3:

$$I \text{ نعتبر } f \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال } [0, +\infty[\text{ بما يلي: } \begin{cases} f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (الوحدة = 2cm).

(1) أ) نضع $X = -\frac{2}{x}$ إذن $X \rightarrow -\infty \Rightarrow x \rightarrow 0^+ \Rightarrow X \rightarrow -\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2)e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{X} + 2\right)e^X = 0 = f(0)$

لأن $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$. وبالتالي فإن f متصلة على اليمين في النقطة 0.

(ب) نضع $X = -\frac{2}{x}$ إذن $X \rightarrow -\infty \Rightarrow x \rightarrow 0^+$ ومنه:

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ و } \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x} e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} (1-X) e^X = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X - X e^X = 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 ولدينا $f'_d(0) = 0$.

(ج) ليكن $x \in]0, +\infty[$ لدينا:

$$f'(x) = \left((x+2)e^{-\frac{2}{x}} \right)' = (x+2)' e^{-\frac{2}{x}} + (x+2) \left(-\frac{2}{x} \right)' e^{-\frac{2}{x}} = \left(1 + \frac{2}{x^2} (x+2) \right) e^{-\frac{2}{x}} = \frac{(x+1)^2 + 3}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} > 0$$

إذن f تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$.

(2) أ) نضع $X = -\frac{2}{x}$ إذن $X \rightarrow 0^- \Rightarrow x \rightarrow +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0^-} (-2+2X) e^X = +\infty$

(ب) نضع : $u(t) = e^{-t} + t - 1$ و $v(t) = \frac{t^2}{2}$ لكل $t \in [0, +\infty[$.

لدينا u و v قابلتين للإشتقاق مرتين على المجال $[0, +\infty[$ و u' و v' متصلتين على المجال $[0, +\infty[$ ولدينا :

$$. t \in [0, +\infty[\text{ لكل } v''(t) = 1 \text{ و } v'(t) = t \text{ و } u''(t) = e^{-t} \text{ و } u'(t) = -e^{-t} + 1$$

بما أن لكل $t \in [0, +\infty[: 0 \leq u''(t) \leq v''(t) \Rightarrow 0 \leq e^{-t} \leq 1 \Rightarrow -t \leq 0 \Rightarrow t \geq 0$ ؛

فإن : $0 \leq u'(x) \leq v'(x) \Rightarrow 0 \leq \int_0^x u''(t) dt \leq \int_0^x v''(t) dt \Rightarrow 0 \leq u'(x) \leq v'(x)$ لأن $\forall x \geq 0 : 0 \leq \int_0^x u''(t) dt \leq \int_0^x v''(t) dt$

ومنه فإن : $0 \leq u(t) \leq v(t) \Rightarrow 0 \leq \int_0^t u'(x) dx \leq \int_0^t v'(x) dx \Rightarrow 0 \leq u(t) \leq v(t)$ لأن $\forall t \geq 0 : 0 \leq \int_0^t u'(x) dx \leq \int_0^t v'(x) dx$

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[: 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}}$$
 وبالتالي فإن :

(ج) ليكن $x > 0$. لدينا $\frac{2}{x} > 0$ وبتطبيق السؤال السابق، نجد : $0 \leq e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2}{x} - 1 \leq \frac{2}{x^2}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{x} \leq e^{-\frac{2}{x}} \leq 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{x}\right)(x+2) \leq (x+2)e^{-\frac{2}{x}} \leq \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)(x+2)$$

$$\Rightarrow x + 2 - 2 - \frac{4}{x} \leq f(x) \leq x + 2 - 2 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$$

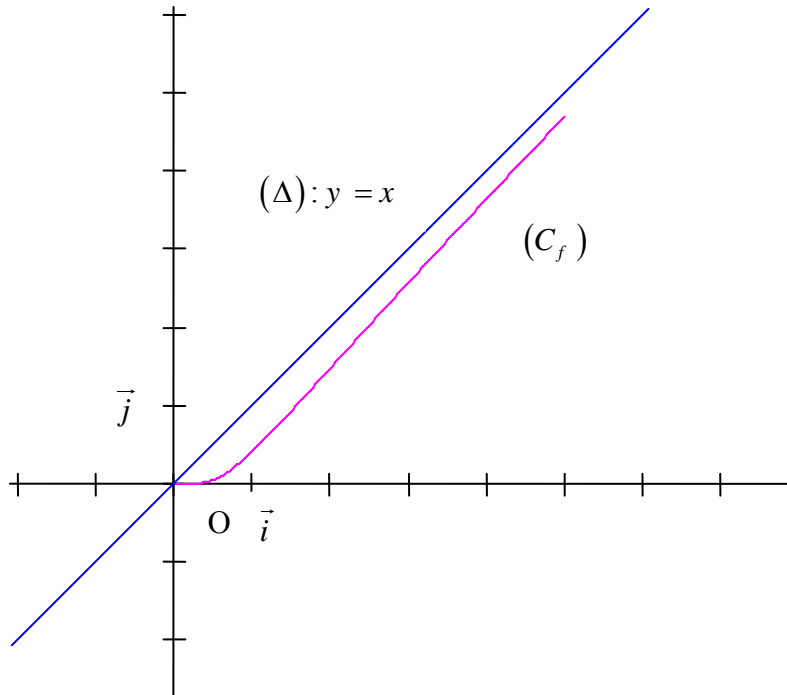
$$\Rightarrow x - \frac{4}{x} \leq f(x) \leq x + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}}$$

(د) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{x} = 0$ و $\forall x > 0 : -\frac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

إذن : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0}$. ومنه نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مانلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$.

(3) إنشاء المنحنى (C_f) :



$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{x}} ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ليكن } n \in \mathbb{N}^* \text{ و } f_n \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال }]0, +\infty[\text{ بما يلي :} \quad \text{II}$$

(1) نضع $X = -\frac{2}{x}$. إذن : $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow X \rightarrow -\infty$ ومنه فإن :

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{nx}\right) e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{X}{n}\right) e^X = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X - \frac{1}{n} X e^X = 0$$

إذن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 ولدينا : $(f_n')_d(0) = 0$.

$$f_n'(x) = \left(\left(x + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{x}}\right)' = \left(x + \frac{2}{n}\right)' e^{-\frac{2}{x}} + \left(x + \frac{2}{n}\right) \left(-\frac{2}{x}\right)' e^{-\frac{2}{x}} = \left(1 + \left(x + \frac{2}{n}\right) \frac{2}{x^2}\right) e^{-\frac{2}{x}} > 0 \text{ ليكن } x > 0 \text{ . لدينا :}$$

إذن f_n دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

(أ) لدينا f_n متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$ ؛ إذن f_n تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال $]0, +\infty[$.

وبما أن $\frac{2}{n} \in]0, +\infty[$ ؛ فإن $\exists! a_n \in]0, +\infty[/ f_n(a_n) = \frac{2}{n}$.

(ب) ليكن $x > 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$. لدينا :

$$\left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) - \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right) = \left(\left(x + \frac{2}{n+1}\right) e^{-\frac{2}{x}} - \frac{2}{n+1}\right) - \left(\left(x + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{x}} - \frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\right) \left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right)$$

$$\left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) - \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right) = \left[-\frac{2}{n(n+1)} \left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right)\right] \quad \text{إذن :}$$

$$x > 0 \Rightarrow -\frac{2}{x} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{2}{x}} < 1 \Rightarrow -\frac{2}{n(n+1)} \left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right) > 0 \text{ ومنه فإن :}$$

$$\forall x > 0 ; \forall n \in \mathbb{N}^* ; f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$f_{n+1}(a_{n+1}) - \frac{2}{n+1} > f_n(a_{n+1}) - \frac{2}{n} \Rightarrow 0 > f_n(a_{n+1}) - \frac{2}{n} \quad (\text{لأن } f_{n+1}(a_{n+1}) = 0) \quad \text{لدينا (ج)}$$

$$\Rightarrow f_n(a_{n+1}) < \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < f_n^{-1}\left(\frac{2}{n}\right) \quad (\text{لأن } f_n \text{ تقابل من }]0, +\infty[\text{ نحو }]0, +\infty[)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \quad (\text{لأن } f_n(a_n) = \frac{2}{n})$$

وبالتالي فإن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية تناقصية ؛ وبما أنها مصغورة بالعدد 0 ($\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n > 0$) ؛ فإنها متقاربة . نضع $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

$$f_n(a_n) = \frac{2}{n} \Rightarrow \left(a_n + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{a_n}} = \frac{2}{n} \Rightarrow a_n + \frac{2}{n} = \frac{2}{n} e^{\frac{2}{a_n}} \Rightarrow na_n + 2 = 2e^{\frac{2}{a_n}} \Rightarrow na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2 \quad \text{لدينا (د)}$$

(هـ) لدينا $a_n > 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*$. إذن $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 0$. نفترض أن $a \neq 0$ ؛ إذن : $a > 0$.

ولدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = +\infty$ لكن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2e^{\frac{2}{a_n}} - 2) = 2e^{\frac{2}{a}} - 2$. وهذا تناقض . وبالتالي فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بمايلي : $\forall x \in]0, +\infty[: F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

(أ) ليكن $x > 0$. لدينا f تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$ و $x \leq 2x$. إذن :

$$f(x) \int_x^{2x} dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq f(2x) \int_x^{2x} dt : \forall t \in [x, 2x]: x \leq t \leq 2x \Rightarrow f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$$

ومنه فإن : $xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$ لكل $x > 0$

(ب) لدينا $F(x) \geq xf(x) \forall x > 0$ ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ومنه نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

(أ) لدينا f متصلة على المجال $[0, +\infty[$. لنكن ψ دالة أصلية للدالة f على المجال $[0, +\infty[$. إذن :

$$\forall x \in [0, +\infty[: F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt = \psi(2x) - \psi(x)$$

بما أن $x \mapsto 2x$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ونحول المجال $[0, +\infty[$ نحو المجال $]0, +\infty[$ وبما أن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ؛ فإن $x \mapsto \psi(2x)$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

ولدينا : $\left[\forall x > 0: f(x) \leq \frac{F(x)}{x} \leq f(2x) \right] \Rightarrow \left[\forall x > 0: xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x) \right]$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} f(2x) = 0$$

وبالتالي فإن F قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$.
(ب) حسب (أ) نعلم أن $F'_d(0) = 0$ ليكن $x > 0$ لدينا :

$$F'(x) = (\psi(2x) - \psi(x))' = (2x)' \psi'(2x) - \psi'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2(2x + 2)e^{\frac{1}{x}} - (x + 2)e^{\frac{2}{x}}$$

$$F'(x) = e^{\frac{2}{x}} \left[4(x + 1)e^{\frac{1}{x}} - (x + 2) \right] = e^{\frac{2}{x}} \left[(x + 2) \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - (x + 2)e^{\frac{1}{x}} + 4(x + 1)e^{\frac{1}{x}} \right]$$

$$F'(x) = e^{\frac{2}{x}} \left[(x + 2) \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + (3x + 2)e^{\frac{1}{x}} \right] : \text{ومنه فإن :}$$

$$\begin{cases} F'(x) = e^{\frac{2}{x}} \left[(x + 2) \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + (3x + 2)e^{\frac{1}{x}} \right] ; x > 0 \\ F'_d(0) = 0 \end{cases} \text{ وبالتالي فإن :}$$

(3) لدينا : $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} > 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} - 1 > 0$ و $x > 0 \Rightarrow x + 2 > 0$ و $(3x + 2)e^{\frac{1}{x}} > 0$

إذن : $F'(x) > 0 \forall x > 0$ ومنه فإن F تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة F على المجال $[0, +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	0	+
$F(x)$	0	$+\infty$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{-1\}: f(z) = \frac{iz - 1}{(z + 1)^2}$$

التمرين 4 :

(أ) ليكن y عدداً حقيقياً. لدينا :

$$\begin{aligned} f(iy) = iy &\Leftrightarrow \frac{-y - 1}{(iy + 1)^2} = iy \\ &\Leftrightarrow -y - 1 = iy(-y^2 + 1 + 2iy) \\ &\Leftrightarrow -y - 1 = -2y^2 + iy(-y^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -y - 1 = -2y^2 \\ y(1 - y)(1 + y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - y - 1 = 0 \\ (y = 0) \vee (y = 1) \vee (y = -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = 1$$

(ب) لدينا :

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{iz - 1}{(z + 1)^2} = z$$

$$\Leftrightarrow iz - 1 = z(z^2 + 2z + 1)$$

$$\Leftrightarrow iz - 1 = z^3 + 2z^2 + z$$

$$\Leftrightarrow z^3 + 2z^2 + (1 - i)z + 1 = 0 : (*)$$

نعلم أن $f(i) = i$ إذن i حل للمعادلة (*). نتجزأ القسمة الأفقيديية ل $z^3 + 2z^2 + (1 - i)z + 1$ على $z - i$ كمايلي :

$\odot \frac{z^3 + 2z^2 + (1 - i)z + 1}{z^3 - iz^2}$	$z - i$
$\odot \frac{(2 + i)z^2 + (1 - i)z + 1}{(2 + i)z^2 + (1 - 2i)z}$	$z^2 + (2 + i)z + i$
$\frac{iz + 1}{iz + 1}$	
00	

$$f(z) = z \Leftrightarrow (z - i)(z^2 + (2 + i)z + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \vee z^2 + (2 + i)z + i = 0 : (**)$$

نحل المعادلة (**): لدينا $\Delta = (2 + i)^2 - 4i = 7 - 1 + 4i - 4i = 3 = \sqrt{3}^2$ إذن للمعادلة (**): حلين هما :

$$z = \frac{-(2 + i) - \sqrt{3}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(2 + i) + \sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $f(z) = z$ في \mathbb{C} هي : $S = \left\{ i, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$

بما أن $\Re(z_0) = 0$ فإن $z_0 = i$. وبما أن $\Re(z_1) > \Re(z_2)$ فإن $z_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ و $z_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

$$z_1 + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left[1, -\frac{\pi}{6}\right] = \left[1, -\frac{\pi}{6} + 2\pi\right] = \left[1, \frac{11\pi}{6}\right] = \boxed{e^{i\frac{11\pi}{6}}}$$

(2) لدينا :

$$z_2 + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\left[1, \frac{\pi}{6}\right] = \left[1, \frac{\pi}{6} + \pi\right] = \left[1, \frac{7\pi}{6}\right] = \boxed{e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

و

$$z_1 = -1 + e^{i\frac{11\pi}{6}} = e^{i\frac{11\pi}{12}} \left(-e^{-i\frac{11\pi}{12}} + e^{i\frac{11\pi}{12}} \right) = 2i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

(ب) لدينا :

$$z_2 = -1 + e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{12}} \left(-e^{-i\frac{7\pi}{12}} + e^{i\frac{7\pi}{12}} \right) = 2i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

و

لأن : $\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$. ولدينا :

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

...

ومنه نجد : $z_2 = 2 \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} e^{i \frac{13\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} e^{i \frac{13\pi}{12}}$ و $z_1 = 2 \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} e^{i \frac{17\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} e^{i \frac{17\pi}{12}}$:
 (3) نضع $z = e^{i\alpha}$ حيث : $0 \leq \alpha < \pi$

(أ) لدينا : $\overline{f(z)} = \overline{\left(\frac{iz - 1}{(z+1)^2} \right)} = \frac{-i\bar{z} - 1}{(\bar{z}+1)^2} = \frac{-iz^2\bar{z} - z^2}{(z\bar{z} + z)^2} = \frac{-iz - z^2}{(1+z)^2} = -z \frac{i+z}{(1+z)^2}$: إذن . $|z|=1 \Rightarrow z\bar{z}=1 \Rightarrow \boxed{\bar{z} = \frac{1}{z}}$

ومنه : $\boxed{f(z) = iz \frac{iz - 1}{(1+z)^2} = izf(z)}$

(ب) لدينا : $f(z) + \overline{f(z)} = 0 \Leftrightarrow izf(z) + f(z) = 0 \Leftrightarrow (iz+1)f(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} iz+1=0 \\ f(z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=i \\ \frac{iz-1}{(z+1)^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=i \\ z=-i \end{cases}$

إذن : $f(z) + \overline{f(z)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\alpha} = i \\ e^{i\alpha} = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \alpha \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}} \text{ (لأن } 0 \leq \alpha < \pi \text{)}$

(ج) لدينا : $f(z) = f(e^{i\alpha}) = \frac{ie^{i\alpha} - 1}{(e^{i\alpha} + 1)^2} = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}} e^{i\alpha} - 1}{\left(e^{\frac{i\alpha}{2}} \left(e^{\frac{i\alpha}{2}} + e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right) \right)^2} = \frac{e^{\frac{1}{2}i(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \left(e^{\frac{1}{2}i(\frac{\pi}{2} + \alpha)} - e^{-\frac{1}{2}i(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \right)}{e^{i\alpha} \left(2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)^2}$

$f(z) = e^{\frac{1}{2}i(\frac{\pi}{2} + \alpha) - i\alpha} \frac{2i \sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)}{4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} e^{\frac{1}{2}i(\frac{\pi}{2} + \alpha) - i\alpha} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} e^{i \frac{3\pi - 2\alpha}{4}}}$

وذلك لأن : $0 \leq \alpha < \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) > 0$

$0 \leq \alpha < \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$

(4) لدينا : $\begin{cases} |z|=1 \\ \Re(f(z)) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{i\alpha} / 0 \leq \alpha < 2\pi \\ \Re(f(z)) = \frac{1}{2} \end{cases}$ ولدينا :

$\Re(f(z)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cos\left(\frac{3\pi - 2\alpha}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi - 2\alpha}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Re(f(z)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Re(f(z)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\Re(f(z)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \left(2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 1 \right) = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \Leftrightarrow \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ \frac{\alpha}{2} \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Re(f(z)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [4\pi] \\ \alpha \equiv \pm \frac{4\pi}{3} [4\pi] \end{cases}$$

ولدينا : $\alpha \equiv -\frac{2\pi}{3} [4\pi] \Rightarrow z = e^{i\alpha} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$ و $\alpha \equiv \frac{2\pi}{3} [4\pi] \Rightarrow z = e^{i\alpha} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = j$

و $\alpha \equiv -\frac{4\pi}{3} [4\pi] \Rightarrow z = e^{i\alpha} = e^{-i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ و $\alpha \equiv \frac{4\pi}{3} [4\pi] \Rightarrow z = e^{i\alpha} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j}$

وبالتالي فإن : $S = \{j, \bar{j}\}$. $z = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ أو $z = j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

طريقة أخرى : لنحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \Re(f(z)) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

لدينا $|z| = 1$. إذن حسب السؤال 3- أ - لدينا : $\overline{f(z)} = izf(z)$ ومنه نستنتج أن :

$$\Re(f(z)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(z) + \overline{f(z)} = 2\Re(f(z)) = 1$$

$$\Leftrightarrow f(z) + izf(z) = 1$$

$$\Leftrightarrow (iz + 1)f(z) = 1$$

$$\Leftrightarrow (iz + 1) \frac{iz - 1}{(z + 1)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (iz - 1)(iz + 1) = (z + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow -z^2 - 1 = z^2 + 2z + 1$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 + 2z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \right) \vee \left(z = e^{i\frac{4\pi}{3}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left[z = j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \vee \left[z = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

وبالتالي فإن : $S = \{j, \bar{j}\}$

طريقة أخرى لإجاز السؤال I - 1 من التمرين الثاني :

نضع $m = p(p^2 - 1)$ لدينا : $m = p(p-1)(p+1)$. إذن m هو جداء ثلاثة أعداد متتابعة ؛ إذن : $3/m$ ومنه $3/p(p^2 - 1)$ وبما أن p أولي و $p \geq 5$ فإن 3 لا يقسم p . إذن : $p \wedge 3 = 1$.

وعليه فإن : $3/p(p^2 - 1) \xrightarrow{\text{Gauss}} 3/(p^2 - 1)$ وهذا يعني أن : $p^2 \equiv 1[3]$ و $p \wedge 3 = 1$

طريقة أخرى لإجاز السؤال II - 1 من التمرين الثاني :

لدينا $a \in \mathbb{N}$ و $a \wedge 24 = 1$

لنفكك a إلى جداء عوامل أولية : $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ حيث p_1 و p_2 و \dots و p_r أعداد صحيحة طبيعية أولية و α_1 و α_2 و \dots و α_r

أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة .

نعلم أن القواسم الأولية للعدد 24 هي 2 و 3 ($24 = 2^3 \times 3$) . وبما أن $a \wedge 24 = 1$ فإن 2 و 3 لا يقسمان a . أي 2 و 3 لا يوجدان في تفكيك a . ومنه فإن الأعداد p_1 و p_2 و ... و p_r أعداد أولية أكبر قطعاً من 3 . أي أكبر من أو يساوي 5 . وحسب $I - 1$, لدينا :

$$p_i \equiv 1[3] \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\} \quad \text{ومنه فإن :}$$

$$a^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = (p_1^2)^{\alpha_1} (p_2^2)^{\alpha_2} \dots (p_r^2)^{\alpha_r} \Rightarrow a^2 \equiv 1^{\alpha_1} \times 1^{\alpha_2} \times \dots \times 1^{\alpha_r} [3]$$

$$\Rightarrow a^2 \equiv 1[3]$$

نتيجة : العدد العقدي z يسمى عدد جاكوبي (Nombre de Jacobi) ويحقق ما يلي :

$$j^4 = j \quad j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i \frac{2\pi}{3}} = \left[1, \frac{2\pi}{3} \right] \quad \text{و} \quad j^2 = \bar{j} \quad \text{و} \quad j^3 = 1 \quad \text{و} \quad 1 + j + j^2 = 0$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2 / z = a + bj$$

الأعداد العقدية 1 و j و \bar{j} هي الجذور الثلاثة للوحدة وصورها في المستوى العقدي هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع .

*** انتهى ***

تمرين :

لتكن a و b و c أعداداً من \mathbb{N}^* بحيث : $ab = c^2$ و $a \wedge b = 1$.

بين أن : $\exists(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / a = m^2$ و $b = n^2$ ؟

الجواب : نضع $d = a \wedge c$. إذن : $m \wedge n = 1$ و $c = dn$ و $a = dm$ و $\exists(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* /$

لدينا : $ab = c^2 \Leftrightarrow bdm = d^2 n^2 \Leftrightarrow \boxed{bm = dn^2}$. ولدينا : $m \wedge n = 1 \Leftrightarrow m \wedge n^2 = 1$.

$$\cdot \begin{cases} n^2 / bm \\ m \wedge n^2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauss}} \boxed{n^2 / b} : (i) \quad \text{فإن } bm = dn^2$$

يكفي أن نبين أن : b / n^2 ؟

لدينا : $bm = n^2 d$ إذن : $b / n^2 d$. لهذا يكفي أن نبين أن : $b \wedge d = 1$ ؟

نضع $\delta = b \wedge d$. لدينا : δ / b و δ / d إذن : $\delta / dm = a$ ومنه فإن : $\delta / a \wedge b$. وبما أن $a \wedge b = 1$ فإن : $\delta / 1$ إذن

$$\cdot \begin{cases} b / dn^2 \\ b \wedge d = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauss}} \boxed{b / n^2} : (ii) \quad \text{وعليه فإن : } \boxed{b \wedge d = 1}$$

من (i) و (ii) , نستنتج أن : $\boxed{b = n^2}$.

ولدينا : $bm = dn^2 \Rightarrow n^2 m = dn^2 \Rightarrow \boxed{m = d}$. وبما أن : $a = dm$ فإن : $\boxed{a = m^2}$

$$\exists(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / a = dm \quad \text{و} \quad c = dn \quad \text{و} \quad m \wedge n = 1$$

خلاصة :

مبرهنة Wilson :

ليكن p عدداً صحيحاً طبيعياً . لدينا :

$$p \text{ أولي} \Leftrightarrow (p-1)! + 1 \equiv 0[p]$$

مبرهنة Fermat :

(أ) ليكن p عدداً أولياً موجباً وليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم بحيث :

$$n^{p-1} \equiv 1[p] \quad \text{لدينا :} \quad n \wedge p = 1$$

(ب) لكل عدد أولي موجب p ولكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم a , لدينا :

$$a^p \equiv a[p]$$