

التمرين الاول

...

$$1 - أ - (S) \begin{cases} x \equiv a [p] \\ x \equiv b [q] \end{cases}$$

لدينا $p \wedge q = 1$ إذن حسب *Bezout* $\exists (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 : pu_0 + qv_0 = 1$
ب - ليكن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

لدينا $x_0 \equiv aqv_0 [p]$ و بما أن $pu_0 + qv_0 = 1$ فإن $qv_0 \equiv 1 [p]$
اذن $aqv_0 \equiv a [p]$ ومنه $x_0 \equiv a [p]$ (1)

لدينا $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ اذن $x_0 \equiv bp [q]$

و بما أن $pu_0 + qv_0 = 1$ فإن $pu_0 \equiv 1 [q]$ اذن $bpu_0 \equiv b [q]$
ومنه $x_0 \equiv b [q]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن x_0 حل للنظمة (S)
2 - ليكن x حلا للنظمة (S)

$$\begin{cases} x_0 \equiv a [p] \\ x_0 \equiv b [q] \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x \equiv a [p] \\ x \equiv b [q] \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} x - x_0 = mp \\ x - x_0 = nq \end{cases} \text{ أي } x - x_0 \equiv 0 [p] \text{ و } x - x_0 \equiv 0 [q]$$

اذن $q | x - x_0 \Rightarrow q | mp$ و بما أن $p \wedge q = 1$ فإنه حسب مبرهنة *Gauss* $q | m$
اذن $(\exists k_1 \in \mathbb{Z}) m = k_1 q$

وبما أن $x - x_0 = mp$ فإن $x - x_0 = k_1 pq$ اذن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$
3 - ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $x - x_0$
لدينا $(\exists k \in \mathbb{Z}) : x - x_0 = kpq$ اذن $x - x_0 \equiv 0 [pq]$

$$\begin{cases} x \equiv x_0 [p] \\ x \equiv x_0 [q] \end{cases} \text{ أي } x - x_0 = (kp)q = (kq)p \text{ اذن } p | x - x_0 \text{ و } q | x - x_0$$

وبما أن x_0 حل للنظمة (S) فإن $\begin{cases} x_0 \equiv a [p] \\ x_0 \equiv b [q] \end{cases}$ اذن $\begin{cases} x \equiv a [p] \\ x \equiv b [q] \end{cases}$ اذن x حل للنظمة (S)

4 - لدينا $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S)

اذن حلول النظمة (S) هي الأعداد النسبية x بحيث $x \equiv x_0 [pq]$

$$5 - لدينا \begin{cases} x \equiv 1 [8] \\ x \equiv 3 [13] \end{cases}$$

العددين 8 و 13 أوليان فيما بينهما اذن $\exists (u_0, v_0) = (5, -3)$ بحيث $8(5) + 13(-3) = 1$

لدينا $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ أي $x_0 = (3 \times 8 \times 5) + (1 \times 13 \times (-3)) = 120 - 39$

اذن $x_0 = 81$ حل للنظمة (S)

و بالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي الأعداد النسبية x بحيث $x \equiv 81 [104]$

التمرين الثاني

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر من أو يساوي 3 . لدينا n صندوقا مرقما من 1 إلى n الصندوق رقم k ($1 \leq k \leq n$) يحتوي على كرة بيضاء و $n-k$ كرة سوداء

1 - ليكن B الحدث الكرة المسحوبة بيضاء لكل k من $\{1, 2, \dots, n\}$

نضع E_k الحدث اختيار الصندوق رقم k

لدينا $E_k \cap E_p = \emptyset$ ($k \neq p$) و $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$

$$p(B) = p(B \cap \Omega) = p(B \cap (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n))$$

$$p(B) = p((B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup \dots \cup (B \cap E_n))$$

$$p(B) = p(B \cap E_1) + p(B \cap E_2) + \dots + p(B \cap E_n)$$

$$p(B \cap E_k) = p(E_k) \times p_{E_k}(B) \quad \text{اذن} \quad p_{E_k}(B) = \frac{p(B \cap E_k)}{p(E_k)} \quad \text{لدينا}$$

$$p(B) = p(E_1) \times p_{E_1}(B) + p(E_2) \times p_{E_2}(B) + \dots + p(E_n) \times p_{E_n}(B) \quad \text{اذن}$$

$$p(E_1) = p(E_2) = \dots = p(E_n) = \frac{1}{n} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{و} \quad p_{E_k}(B) = \frac{k}{n} \quad \text{(لان الصندوق رقم } k \text{ يحتوي على } k \text{ كرة بيضاء)}$$

$$\text{اذن} \quad p(B) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2n}$$

$$\text{و بالتالي} \quad p(B) = \frac{(n+1)}{2n}$$

2 - ليكن I الحدث : الصندوق يحمل رقما فرديا

لدينا n فردي $n = 2k + 1$. عدد الصناديق التي تحمل رقما فرديا هو $\frac{(2k+1)+1}{2} = k+1$

$$\text{اذن} \quad p(I) = \frac{C_{k+1}^1}{C_n^1} = \frac{k+1}{n} \quad \text{وبما أن } n = 2k + 1 \quad \text{فإن} \quad k = \frac{n-1}{2} \quad \text{اذن} \quad p(I) = \frac{\frac{n-1}{2} + 1}{n}$$

$$\text{و بالتالي} \quad p(I) = \frac{(n+1)}{2n}$$

3 - احتمال الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي هو : $p_I(B) = \frac{p(B \cap I)}{p(I)}$

$$\text{لدينا} \quad I = E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup \dots \cup E_n$$

$$\text{اذن} \quad p(B \cap I) = p(B \cap (E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup \dots \cup E_n))$$

$$= p((B \cap E_1) \cup (B \cap E_3) \cup \dots \cup (B \cap E_n))$$

$$= p(B \cap E_1) + p(B \cap E_3) + \dots + p(B \cap E_n)$$

$$\text{اذن} \quad p(B \cap I) = p(E_1) \times p_{E_1}(B) + p(E_3) \times p_{E_3}(B) + \dots + p(E_n) \times p_{E_n}(B)$$

$$p(B \cap I) = \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} \times \frac{3}{n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} \times \frac{n}{n} \right)$$

$$p(B \cap I) = \frac{1}{n^2} (1 + 3 + 5 + \dots + n)$$

يمكن أن نبين بالترجع أن : $1 + 3 + 5 + \dots + n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2k + 1$

$$= (k+1)^2 = \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \quad \text{(لان } n = 2k + 1 \text{)}$$

$$\text{اذن} \quad p(B \cap I) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \quad \text{اذن} \quad p_I(B) = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \times \frac{2n}{n+1} \quad \text{و بالتالي} \quad p_I(B) = \frac{n+1}{2n}$$

نعتبر المجموعة $(H) = \{M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

1 - أ - ليكن $z = x + iy$

$$M \in (H) \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1$$

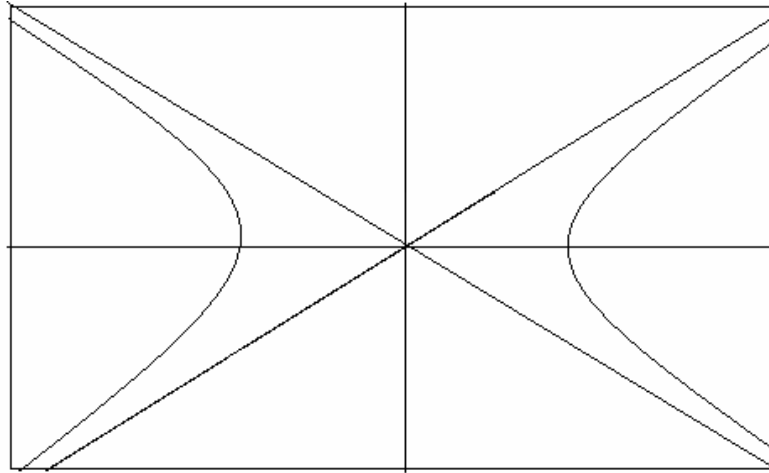
$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy - x^2 - y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 1 \quad (1)$$

(1) هي معادلة ديكارتية للمجموعة (H)

ب - بما أن معادلة المجموعة (H) هي : $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ فان (H) هذلول مركزه $O(0,0)$

و رأسيه $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$ ومقاربيه $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ و $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$



2 - لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتان من (H). بحيث $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

$$\text{نضع } \varphi(z, z') = z\bar{z}' + \bar{z}z' - \bar{z}z'$$

$$\text{لدينا } \bar{z}z' = (xx' + yy') + i(xy' - x'y) \quad \text{و} \quad z\bar{z}' = (xx' + yy') + i(x'y - xy')$$

$$\text{اذن } \bar{z}z' = (xx' - yy') - i(xy' + x'y) \quad \text{و} \quad \varphi(z, z') = (xx' + 3yy') + i(xy' + x'y)$$

$$\text{لدينا } (xx' + 3yy')^2 - 3(xy' + x'y)^2 = x^2x'^2 + 9y^2y'^2 - 3x^2y'^2 - 3x'^2y^2$$

بما أن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتان من (H) فان $x^2 - 3y^2 = 1$ و $x'^2 - 3y'^2 = 1$

$$\text{اذن } (x^2 - 3y^2)(x'^2 - 3y'^2) = 1 \quad \text{أي} \quad x^2x'^2 + 9y^2y'^2 - 3x^2y'^2 - 3x'^2y^2 = 1$$

و بالتالي $M(\varphi(z, z')) \in (H)$

ب - لدينا $\varphi(z, 1) = z \times 1 + \bar{z} \times 1 - \bar{z} \times 1 = z$ و لدينا $\varphi(z, \bar{z}) = z \times \bar{z} + \bar{z} \times z - \bar{z} \times z = z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2$

وبما أن $M(z) \in (H)$ فان $z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1$ و منه $\varphi(z, \bar{z}) = 1$

3 - نزود (H) بقانون التركيب الداخلي * حيث لكل $M(z)$ و $M(z')$ من (H) $M(z) * M(z') = M(\varphi(z, z'))$

لكل $M(z)$ و $M(z')$ و $M(z'')$

$$M(z) * (M(z') * M(z'')) = M(z) * M(\varphi(z', z'')) \quad \text{لدينا}$$

$$= M(z) * M(z'\bar{z}'' + \bar{z}'z'' - \bar{z}'z'') = M(\varphi(z, z'\bar{z}'' + \bar{z}'z'' - \bar{z}'z''))$$

$$= M(z(\bar{z}'z'' + z'\bar{z}'' - z'z'') + \bar{z}(z'\bar{z}'' + \bar{z}'z'' - \bar{z}'z'') - \bar{z}z'z'' - \bar{z}z'z'' + \bar{z}z'z'')$$

$$= M(\bar{z}z'z'' + \bar{z}z'z'' - \bar{z}z'z'' - \bar{z}z'z'' + \bar{z}z'z'') \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
(M(z) * M(z')) * M(z'') &= M(\overline{zz' + \overline{zz'} - \overline{zz'}}) * M(z'') \\
&= M(\varphi(\overline{zz' + \overline{zz'} - \overline{zz'}}, z'')) \\
&= M(\overline{zz'z'' + \overline{zz''z} - \overline{zz'z''} + \overline{zz'z''} + \overline{zz'z''} - \overline{zz'z''} - \overline{zz'z''} + \overline{zz'z''}) \\
&= M(\overline{zz'z'' + \overline{zz'z''} - \overline{zz'z''} - \overline{zz'z''} + \overline{zz'z''}) \quad (2)
\end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن $M(z) * (M(z') * M(z'')) = (M(z) * M(z')) * M(z'')$

اذن القانون * تجميعي

$$M(z) * M(z') = M(\varphi(z, z')) = M(\overline{zz' + \overline{zz'} - \overline{zz'}}) \quad \text{لدينا}$$

$$M(z') * M(z) = M(\varphi(z', z)) = M(\overline{z'z + \overline{z'z} - \overline{zz'}}) \quad \text{و}$$

اذن $M(z) * M(z') = M(z') * M(z)$ لكل $M(z)$ و $M(z')$ من (H)

اذن القانون * تبادلي

$$M(\varphi(z, 1)) = M(z) \quad \text{أي} \quad M(z) * M(1) = M(z) \quad \text{لكل } M(z) \text{ من (H) لدينا}$$

اذن $M(1)$ هو العنصر المحايد للقانون *

$$M(\varphi(z, \overline{z})) = M(1) \quad \text{اذن} \quad M(z) * M(\overline{z}) = M(1) \quad \text{لدينا}$$

اذن كل عنصر $M(z)$ من (H) يقبل ممثالا في (H) هو $M(\overline{z})$ و بالتالي $(H, *)$ زمرة تبادلية

التمرين الرابع

$$F = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

نضع $I = M(1, 0)$ و $J = M(0, 1)$ و $O = M(0, 0)$

1 - أ - $F \subset M_2(\mathbb{R})$ و $F \neq \emptyset$ لان $O \in F$

لكل $M(a, b)$ و $M(c, d)$ من F $M(a, b) - M(c, d) = M(a-c, b-d) \in F$

اذن $(F, +)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية $(M_2(\mathbb{R}), +)$ اذن $(F, +)$ زمرة تبادلية

$$\forall M(a, b) \in F \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda.M = \lambda.(aI + bJ) = (\lambda a)I + (\lambda b)J$$

اذن $\lambda.M \in F$ اذن F جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي .

بما أن $F \subset M_2(\mathbb{R})$ و $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي فان الخاصيات الأربع تبقى متحققة

$$\forall (M, M') \in F^2 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad \alpha.(M + M') = \alpha.M + \alpha.M'$$

$$\forall M \in F \quad (\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) \quad (\alpha + \beta).M = \alpha.M + \beta.M$$

$$(\alpha\beta).M = \alpha.(\beta.M)$$

$$\forall M \in F \quad 1.M = M$$

اذن $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب - لدينا $M(a, b) = aI + bJ$ اذن الأسرة (I, J) مولدة للفضاء المتجهي الحقيقي F

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha I + \beta J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta & -\beta \\ 5\beta & \alpha - 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

اذن الأسرة (I, J) حرة ومنه الأسرة (I, J) أساس للفضاء المتجهي F

عدد عناصر الأساس (I, J) هو 2 اذن $\dim F = 2$

2 - ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى \mathbb{R}

نضع $\alpha = x_1 + iy_1$ حيث $(x_1, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

لكل z من \mathbb{C} يوجد زوج وحيد (x, y) من \mathbb{R}^2 بحيث $z = x + iy$

هل يوجد زوج وحيد (β, γ) من \mathbb{R}^2 بحيث $z = \beta + \gamma\alpha$ ؟

$$x + iy = \beta + \gamma(x_1 + iy_1) \Leftrightarrow x + iy = \beta + \gamma x_1 + i\gamma y_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma x_1 = x \\ \gamma y_1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{y}{y_1} \\ \beta + \frac{x_1}{y_1} y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - \frac{x_1}{y_1} y \\ \gamma = \frac{y}{y_1} \end{cases}$$

لكل z من \mathbb{C} يوجد زوج وحيد (β, γ) من \mathbb{R}^2 بحيث $z = \beta.1 + \gamma.\alpha$ وبالتالي : $(1, \alpha)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$$\psi : \mathbb{C} \rightarrow F \quad - 3$$

لكل عنصر z من \mathbb{C} حيث $z = a + \alpha b$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $z \rightarrow \psi(z) = M(a, b)$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \text{ اذن } J^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \text{ اذن } \text{أ - لدينا}$$

$$I + J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ ولدينا } \text{اذن } J^2 = -2(I + J)$$

$$\text{لدينا } \psi(\alpha) = \psi(0 + \alpha 1) \text{ اذن } \psi(\alpha) = M(0, 1) = J$$

ب - ليكن $z = a + \alpha b$ و $z' = a' + \alpha b'$ عنصران من \mathbb{C}

$$\psi(z.z') = \psi((a + \alpha b)(a' + \alpha b')) \text{ لدينا} \\ = \psi(aa' + (ab' + a'b)\alpha + \alpha^2 bb')$$

$$\psi(z) \times \psi(z') = M(a, b) \times M(a', b') \text{ ولدينا}$$

$$= (aI + bJ) \times (a'I + b'J)$$

$$= aa'I + (ab' + a'b)J + bb'J^2 = aa'I + (ab' + a'b)J + bb'(-2I - 2J)$$

$$= (aa' - 2bb')I + (ab' + a'b - 2bb')J$$

$$= M(aa' - 2bb', ab' + a'b - 2bb')$$

$$= \psi((aa' - 2bb') + \alpha(ab' + a'b - 2bb'))$$

لكي يكون ψ تشاكلا تقابليا يجب أن يكون : $aa' + (ab' + a'b)\alpha + \alpha^2 bb' = (aa' - 2bb') + \alpha(ab' + a'b - 2bb')$

$$\text{اذن } \alpha^2 bb' = -2bb' - 2\alpha bb' \text{ أي } \alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$$

$$\text{لدينا } \Delta' = 1 - 2 = -1 \text{ اذن } \alpha = -1 + i \text{ أو } \alpha = -1 - i$$

$$- 4 \text{ نأخذ } \alpha = -1 + i$$

$$\psi(\alpha^{2007}) = \psi(\underbrace{\alpha.\alpha.\dots.\alpha}_{\text{مر } 2007 \text{ مرة}}) \text{ و } \psi(\alpha) = J \text{ لدينا}$$

$$\text{اذن } \psi(\alpha^{2007}) = \psi(\alpha).\psi(\alpha).\dots.\psi(\alpha) \text{ (} (\mathbb{C}, \times) \text{ نحو } (F, \times) \text{)}$$

$$\text{اذن } \psi(\alpha^{2007}) = J^{2007}$$

حسب صيغة Moivre لدينا

$$\alpha^{2007} = (-1 + i)^{2007} = (\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}))^{2007} = (\sqrt{2})^{2007} (\cos \frac{3\pi}{4} . 2007 + i \sin \frac{3\pi}{4} . 2007)$$

$$\alpha^{2007} = (\sqrt{2})^{2007} (-\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2})^{2007} (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-2^{1004}}{2} - i \frac{2^{1004}}{2} \text{ اذن}$$

$$\alpha^{2007} = -2^{1003} - i2^{1003} = -2^{1003}(1+i) = -2^{1003}(-1+i+2) = -2^{1004} - 2^{1003}(-1+i)$$

$$\alpha^{2007} = -2^{1004} + \alpha(-2^{1003})$$

$$\psi(a + \alpha b) = M(a, b) \quad \text{أي} \quad \psi(z) = M(a, b) \quad \text{نعلم أن}$$

$$\psi(\alpha^{2007}) = J^{2007} \Leftrightarrow \psi(-2^{1004} + \alpha(-2^{1003})) = J^{2007}$$

$$\Leftrightarrow M(-2^{1004}, -2^{1003}) = J^{2007}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{J^{2007} = -2^{1004}I - 2^{1003}J}$$

التمرين الخامس

$$g(x) = 1 + x - e^{-x} \quad -1 \quad (I)$$

$$\mathbb{R} \quad \text{اذن } g \text{ تزايدية قطعاً على } \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = 1 + x - e^{-x} > 0 \quad - \text{أ}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x - e^{-x} \quad - \text{ب}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x \left(1 - \frac{1}{xe^x}\right)$$

$$= (-\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x - e^{-x}$$

$$= +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ج - g متصلة و تزايدية قطعاً على \mathbb{R} و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ اذن g تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}

و بما أن $g(0) = 0$ فان $x_0 = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$

$$2 - \text{لدينا } f(x) = \frac{1}{1 + x - e^{-x}}$$

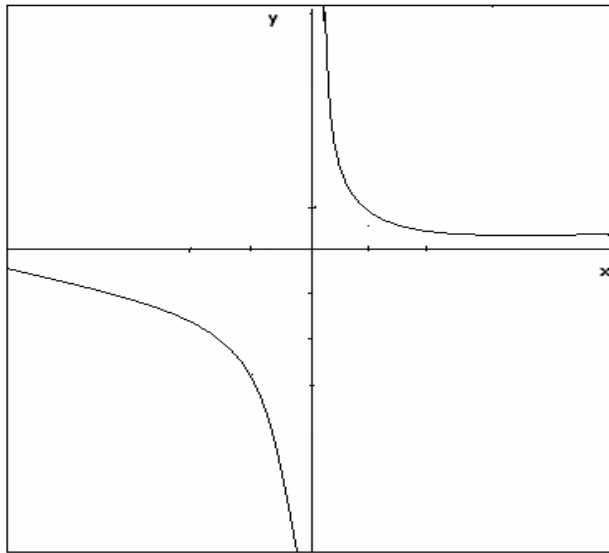
$$\text{أ - } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x} + x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{1 + x - e^{-x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{e^x} + x} = +\infty$$

$$\text{ب - لدينا } f'(x) = \frac{-(1 + x - e^{-x})'}{(1 + x - e^{-x})^2} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

ج - بما أن $g'(x) > 0$ فان $f'(x) < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
$f(x)$	0	$-\infty$	0



3 - أ - ليكن n من \mathbb{N}^*

لتكن $h(x) = f(x) - n$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - n = -n$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty - n = +\infty$

اذن h تناقصية قطعاً على \mathbb{R}^{*+} . $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \quad h'(x) = f'(x) < 0$

بما أن متصلة و تناقصية قطعاً على \mathbb{R}^{*+} فان h تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $]-n, +\infty[$

اذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_n من $]0, +\infty[$ بحيث $h(x_n) = 0$

اذن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلاً وحيداً x_n في المجال $]0, +\infty[$

ب - لدينا $f(x_n) = n$ و $f(x_{n+1}) = n+1$ اذن $f(x_{n+1}) > f(x_n)$

وبما أن f تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$ فان $x_{n+1} < x_n$ اذن المتتالية (x_n) تناقصية

لدينا $x_n \in]0, +\infty[$ اذن (x_n) مصغرة بالعدد 0

و بما أن (x_n) تناقصية و مصغرة بالعدد 0 فان (x_n) متقاربة

ج - لتكن $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

$$f(x_n) = n \Leftrightarrow \frac{1}{1+x_n - e^{-x_n}} = n$$

$$\Leftrightarrow 1+x_n - e^{-x_n} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x_n - e^{-x_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1+l - e^{-l} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1+l = e^{-l}$$

نفترض أن $l > 0$

اذن $1+l > 1$ و $-l < 0$ أي $e^{-l} < 1$ اذن $1+l > 1$ و $e^{-l} < 1$ غير ممكن

اذن $l = 0$ و بالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x - e^{-x}} = 1 \quad \text{II - أ - 1}$$

$$\Leftrightarrow 1+x - e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = x$$

ب - حسب س 3 - أ - المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha = x_1 > 0$

لنبين أن $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

لتكن $u(x) = f(x) - 1$ لدينا u متصلة على $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ و $u'(x) = f'(x) > 0$ إذن u تناقصية قطعاً $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

لدينا $u(1) \times u\left(\frac{1}{e}\right) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلاً وحيداً $\frac{1}{e} < \alpha < 1$

2 - أ - لدينا $y_1 = 1$ و $y_{n+1} = e^{-y_n}$

من أجل $n = 1$ لدينا $y_1 = 1$ إذن $\frac{1}{e} \leq y_1 \leq 1$

نفترض أن $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$ و نبين أن $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq 1$

لدينا $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$ إذن $-1 \leq -y_n \leq -\frac{1}{e}$ أي $-1 \leq -y_n \leq 0$

إذن $e^{-1} \leq e^{-y_n} \leq 1$ أي $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq 1$

و بالتالي $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب - لتكن $f(x) = e^{-x}$ f متصلة على المجال المغلق الذي طرفاه α و y_n

و قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه α و y_n

إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية يوجد عدد حقيقي c محصور بين α و y_n

بحيث $|f(y_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| |y_n - \alpha|$ إذن $|y_{n+1} - \alpha| = |f'(c)| |y_n - \alpha|$

لدينا $f'(x) = -e^{-x}$ إذن $f'(c) = -e^{-c}$ أي $|f'(c)| = e^{-c}$

لدينا $\alpha < c < y_n$ إذن $-y_n < -c < -\alpha$

و بما أن $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ فإن $\frac{1}{e} < -\alpha < -\frac{1}{e}$

إذن $0 < e^{-c} < e^{-\alpha} < e^{-\frac{1}{e}}$

و بالتالي $(\forall n \in \mathbb{N}^*) |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$

ج - لدينا $|y_2 - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_1 - \alpha|$

$|y_3 - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_2 - \alpha|$

.....

$|y_n - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_{n-1} - \alpha|$

إذن $|y_n - \alpha| \leq (e^{-\frac{1}{e}})^{n-1} |y_1 - \alpha|$ و منه $|y_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e^e}\right)^{n-1} |y_1 - \alpha|$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^e}\right)^{n-1} = 0$ فإن (y_n) متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \alpha$

(III) لتكن F الدالة المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt, x > 0 \\ F(0) = \frac{1}{2} \ln 2 \end{cases}$$

1 - أ - لدينا $t > 0$ إذن $-t < 0$ أي $e^{-t} < 1$ إذن $t + e^{-t} < 1 + t$ أي $t < 1 + t - e^{-t}$

إذن $\frac{1}{1 + t - e^{-t}} < \frac{1}{t}$ أي $f(t) < \frac{1}{t}$ (I)

لدينا $-e^{-t} < 0$ إذن $1+t-e^{-t} < 1+t$ إذن $\frac{1}{1+t} < \frac{1}{1+t-e^{-t}}$ أي $\frac{1}{1+t} < f(t)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $\frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ ($\forall t > 0$)

ب - لدينا $\frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$

اذن $(x > 0) \int_x^{2x} \frac{1}{1+t} dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$

اذن $\ln(1+2x) - \ln(1+x) \leq F(x) \leq \ln(2x) - \ln(x)$

اذن $\ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) \leq F(x) \leq \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$

و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \ln 2$ فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$

2 - أ - لنبين أن $1-t \leq e^{-t} \leq 1-t + \frac{t^2}{2}$ ($\forall t \geq 0$)

لتكن $v(t) = e^{-t}$ و $u(t) = 1-t$

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على $[0, +\infty[$ و $u(0) = 1$ و $v(0) = 1$

$\forall t \in [0, +\infty[$ $u'(t) = -1$ و $v'(t) = -e^{-t}$

لدينا $t \geq 0$ اذن $-t \leq 0$ أي $e^{-t} \leq 1$ أي $-1 \leq -e^{-t}$ أي $u'(t) \leq v'(t)$

اذن $u(t) \leq v(t)$ لكل $(t \geq 0)$ (1)

لتكن $w(t) = 1-t + \frac{t^2}{2}$ لدينا $w(0) = 1$ و $u(0) = 1$

$\forall t \in [0, +\infty[$ $w'(t) = -1+t$

بما أن $u(t) \leq v(t)$ فان $1-t \leq e^{-t}$ أي $-e^{-t} \leq -1+t$

اذن $v'(t) \leq w'(t)$

ومنه $v(t) \leq w(t)$ لكل $(t \geq 0)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $u(t) \leq v(t) \leq w(t)$

و بالتالي $1-t \leq e^{-t} \leq 1-t + \frac{t^2}{2}$ ($\forall t \geq 0$)

ب - لدينا $1-t \leq e^{-t}$ لكل $t \geq 0$

اذن $1-e^{-t} \leq t$ أي $1+t-e^{-t} \leq 2t$ أي $\frac{1}{2t} \leq \frac{1}{1+t-e^{-t}}$

اذن $\frac{1}{2t} \leq f(t)$ (1)

لدينا $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right) - f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right) - \frac{1}{1+t-e^{-t}}$

$$= \frac{2-2t+t^2-2e^{-t}}{t(4-t)(1+t-e^{-t})}$$

بما أن $e^{-t} \leq 1-t + \frac{t^2}{2}$ فان $2-2t+t^2-2e^{-t} \geq 0$

و بما أن $f(t) > 0$ لكل $(t > 0)$ فان $1+t-e^{-t} > 0$

و لدينا $t(4-t) > 0$ لان $0 < t < 4$

اذن $f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$ لكل t من $]0, 4[$

ج - لدينا $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$

$$\frac{1}{2} [\ln t]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2} [\ln t - \ln(4-t)]_x^{2x} \quad \text{أي}$$

$$\int_x^{2x} \frac{1}{2t} dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) dt \quad \text{اذن}$$

$$\frac{\ln 2}{2} \leq F(x) \leq \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4-2x}{4-x} \right) \quad \text{أي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \frac{\ln 2}{2} = F(0) \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{4-2x}{4-x} \right) = \ln 1 = 0$$

اذن F متصلة في $x_0 = 0$

$$3 - \text{أ} - \text{لدينا} \quad F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

f متصلة على $[x, 2x]$ اذن f تقبل دالة أصلية φ على $[x, 2x]$ بحيث φ قابلة للاشتقاق على $[x, 2x]$ ($x > 0$)

...

$$\varphi'(x) = f(x) \quad \text{و}$$

$$\text{لدينا} \quad F(x) = [\varphi(t)]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

الدالة $x \rightarrow \varphi(x)$ قابلة للاشتقاق على $[x, 2x]$

الدالة $x \rightarrow \varphi(2x)$ قابلة للاشتقاق على $[x, 2x]$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق

اذن F قابلة للاشتقاق على $[x, 2x]$ حيث ($x > 0$)

اذن F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^{*+}

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \quad F'(x) = \varphi'(2x) \cdot 2 - \varphi'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2}{1+2x-e^{-2x}} - \frac{1}{1+x-e^{-x}} \\ &= \frac{1 - \frac{2}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}}{g(x) \cdot g(2x)} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^{2x} \cdot g(x) \cdot g(2x)} \end{aligned}$$

$$F'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x} \cdot g(x) \cdot g(2x)}$$

ب - لدينا $(e^x - 1)^2 \geq 0$ و $g(x) > 0$ و $g(2x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}^{*+}

اذن F تزايدية قطعاً على \mathbb{R}^{*+}