

...

الإمتحان الوطني الموحد للبكالوريا

مادة : الرياضيات

شعبة : العلوم الرياضية

الدورة العادية : يونيو 2006

إنجاز : محمد أيت الحسين

أستاذ ثانوية مولاي رشيد : فاس

التمرين الأول

الجزء الأول :

(1) لدينا لكل $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$ بحيث $b \neq 0$ و $b' \neq 0$:

$$\begin{aligned} M_{(a,b)} \times M_{(a',b')} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a' & b' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a + ba' & bb' \end{pmatrix} = M_{(a+ba', bb')} \end{aligned}$$

بما أن $bb' \neq 0$ فإن $M_{(a+ba', bb')} \in G$ ومنه G مستقرة في

$$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$$

(2) المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تحقق $I = M_{(0,1)}$. إذن I هو العنصر

المحايد ل (G, \times) .

ليكن $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ بحيث $b \neq 0$. لدينا $\det(M_{(a,b)}) = b \neq 0$

إذن $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ وهو :

$$(M_{(a,b)})^{-1} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M_{(a,b)})^{-1} = M_{\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)} \in G$$
 نلاحظ أن :

\times تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ إذن في G بالأحرى.

من كل ما سبق نستنتج أن (G, \times) زمرة.

حسب ما سبق أعلاه لدينا لكل $(a, a', b) \in \mathbb{R}^3$ بحيث $b \neq 0$:

$$M_{(a,b)} \times M_{(a',b)} = M_{(a',b)} \times M_{(a,b)}$$

$$M_{(a,b)} \times M_{(a',b)} = M_{(a',b)} \times M_{(a,b)}$$

$$a + ba' = a' + ba$$

$$(a - a')(1 - b) = 0$$

يكفي إذن أن نختار $(a, a', b) \in \mathbb{R}^3$ بحيث :

$$b \neq 1 \text{ و } a \neq a' \text{ لكي تكون :}$$

$$M_{(a,b)} \times M_{(a',b)} \neq M_{(a',b)} \times M_{(a,b)}$$

مثلا : $(a, a', b) = (0, 1, -1)$ نجد :

$$M_{(0,-1)} \times M_{(1,-1)} = M_{(-1,-1)}$$

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} : \text{ومنه}$$

الجزء الثاني:

φ معرف لأن :

$$(\forall (a, a', b, b') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2}) \quad M_{(a,b)} = M_{(a',b')} \Rightarrow (a,b) = (a',b')$$

φ شمولي لأن : (a,b) يقبل $M_{(a,b)}$ سابقا له.

φ تبايني لأن :

$$\varphi(M_{(a,b)}) = \varphi(M_{(a',b')}) \Rightarrow (a,b) = (a',b')$$

$$\Rightarrow M_{(a,b)} = M_{(a',b')}$$

إذن φ تقابل .

φ تشاكل لأن : لكل $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2}$

$$\varphi(M_{(a,b)} \times M_{(a',b')}) = \varphi(M_{(a+ba', bb')})$$

$$= (a + ba', bb') = (a,b)T(a',b')$$

$$= (\varphi(M_{(a,b)}))T(\varphi(M_{(a',b')}))$$

$M_{(1,-1)} \times M_{(0,-1)} = M_{(1,-1)}$ و
إذن الزمرة (G, \times) ليست تبادلية.

(3) $M_{(0,1)} \in H$ و $H \neq \emptyset$ لأن $H \subset G$

لكل $(b, b') \in \mathbb{R}^2$ لدينا :

$$(b > 0 \text{ و } b' > 0) \Rightarrow bb' > 0$$

إذن H مستقرة قي (G, \times) .

و لدينا لكل عدد حقيقي b : $b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > 0$

إذن :

$$M_{(a,b)} \in H \Rightarrow (M_{(a,b)})^{-1} = M_{\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)} \in H$$

إذن H مستقرة بالمقلوب. ومنه H زمرة جزئية للزمرة (G, \times) .

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} : \text{لدينا (4)}$$

$$P(n) : \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} : \text{لنبين بالترجع أن :}$$

لدينا $P(1)$ صحيحة .

نفترض أن $P(n)$. إذن :

(2) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \mathbf{T})$ زمرة غير تبادلية لأنها صورة زمرة غير تبادلية بتساكل تقابلي.

ملاحظة: العنصر المحايد لهذه الزمرة هو $(0,1)$: $\varphi(M_{(0,1)}) = (0,1)$ ومماثل (a,b) هو:

$$(a,b)' = \left(\varphi(M_{(a,b)})^{-1} \right) = \varphi \left(M_{\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b} \right)} \right) = \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b} \right) \quad (3)$$

$$a^2 d^2 (ad + bd) = b^2 d^2 (ad - bd)^2$$

وبما أن $d \neq 0$ فإن:

$$a^2(a+b) = b^2 d(a-b)^2$$

(اختزلنا ب d^3).

(ب) لدينا حسب أ: $b|(a+b)a^2$ و بما أن $d = x \wedge y$ فإن:

$a \wedge b = 1$ ومنه أيضا: $a^2 \wedge b = 1$ ومنه حسب مبرهنة كوص:

$$b|(a+b) - b = a \quad \text{إذن} \quad b|(a+b)$$

أي: $a \wedge b = b$ ومنه: $b=1$

(ج) تصبح المتساوية أعلاه في أ:

$$d(a-1)^2 = (a+1)a^2$$

ومنه: $a=1 \Rightarrow (a=-1 \text{ أو } a=0)$

هذا يعني بالخصوص أن العبارة $a=1$ خاطئة.

$$a \neq 1$$

إذن:

$$(a-1)|(a+1)a^2$$

$$\begin{aligned} ((a,1)\mathbf{T} \dots \mathbf{T}(a,1))' &= \left(\varphi(M_{(a,1)}) \mathbf{T} \dots \mathbf{T} \varphi(M_{(a,1)}) \right)' \\ &= \left(\varphi \left((M_{(a,1)}) \times \dots \times (M_{(a,1)}) \right) \right)' = \left(\varphi \left((M_{(a,1)})^n \right) \right)' \\ &= \left(\varphi(M_{(na,1)}) \right)' = \varphi \left((M_{(na,1)})^{-1} \right) \\ &= \varphi(M_{(-na,1)}) = (-na,1) \end{aligned}$$

ملخص: $((a,1)\mathbf{T} \dots \mathbf{T}(a,1))' = (-na,1)$

التمرين الثاني:

(1) أ) بالتعويض المباشر نجد:

ونعلم أن : $(a-1) \wedge a = 1$ (حسب متطابقة بوزو والعلاقة :
 $(a - (a-1)) = 1$) إذن كما سبق : $(a-1) \wedge a^2 = 1$ ومنه حسب
 مبرهنة كوص :

$$(a-1) | (a+1)$$

(د) لدينا :

$$\begin{cases} (a-1)|(a+1) \\ (a-1)|(a-1) \end{cases} \Rightarrow (a-1)|((a+1)-(a-1))$$

ومنه : $(a-1) | 2$.

وبما أن $a-1 > 0$ فإن : $a-1 \in \{1,2\}$

$$\text{أي : } a = 2 \text{ أو } a = 3$$

(2) لدينا حسب ما سبق : إذا كان (x, y) حلا للمعادلة (E) فإنه يوجد
 $d \in \mathbb{N}^*$ بحيث :

$$\begin{cases} x = da \\ y = d \\ a \in \{2,3\} \\ d(a-1)^2 = (a+1)a^2 \end{cases}$$

إذا كان $a = 2$ فإن : $d = 12$

إذا كان $a = 3$ فإن : $d = 9$.

ومنه : $(x, y) \in \{(24,2), (27,9)\}$

بإنجاز الحساب تحققنا من كون الزوجين أعلاه حلين للمعادلة ومنه
 مجموعة الحلول :

$$S = \{(24,2), (27,9)\}$$

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

(1) نضع : $z = x + yi$ بحيث : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ لدينا :

$$M(z) \in (H) \Leftrightarrow \text{Re}(P(z)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Re}(x^2 - y^2 + 2ixy - (2 + 6i)(x + yi)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Re}((x^2 - y^2 - 2x + 6y) + i(2xy - 6x - 2y)) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$$

ومنه : $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية ل (H).

$$\text{أي: } (D): y = x + 2 \text{ و } (D'): y - 3 = -x + 4$$

ملحوظة: لم تطلب العناصر المميزة لكن نعطيها إتماماً للفائدة:

$$\text{لدينا: } a = b = \sqrt{8} \text{ ومنه: } c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$$

$$\text{ومنه التباعد المركزي: } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

$$\text{البؤرة: } F(0, 4). \text{ الدليل المرتبط بها: } (\Delta): Y = \frac{a^2}{c} = 2$$

$$\text{البؤرة: } F(0, -4). \text{ الدليل المرتبط بها: } (\Delta): Y = -\frac{a^2}{c} = -2$$

في المعلم $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

(4) الإنشاء: انظر الشكل أسفله.

الجزء الثاني:

(1) المعادلة: $P(z) = 4 - 6i$ تكافئ:

$$z^2 - (2 + 6i)z - 4 + 6i = 0$$

$$\Delta' = (1 + 3i)^2 + 4 - 6i = -4 = (2i)^2 \text{ مميزها المختصر هو:}$$

$$\text{ومن جذراها: } z_1 = 1 + 3i - 2i = 1 + i \text{ و}$$

$$z_2 = 1 + 3i + 2i = 1 + 5i$$

(2) لدينا:

$$x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (y-3)^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{(\sqrt{8})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{8})^2} = -1$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 3 \end{cases} \text{ بحيث:}$$

ومنه (H) هذلول مركزه هو: $\Omega(1, 3)$ و:

$$\frac{X^2}{(\sqrt{8})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{8})^2} = -1$$

معادلة له في المعلم $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

الرأسان: لدينا: $a = b = \sqrt{8}$ ومنه الرأسان: $A(0, \sqrt{8})$ و

$A'(0, -\sqrt{8})$ في المعلم $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ أي: $A(1, 3 + \sqrt{8})$ و

$A'(3, 3 - \sqrt{8})$ في المعلم $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

المقاربان: معادلتا المقاربيين في المعلم $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$(D): Y = X \text{ و } (D'): Y = -X$$

ومن معادلتيهما في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$(D): y - 3 = x - 1 \text{ و } (D'): y - 3 = 1 - x$$

بالمثل : $\tan(\arg(w)) = -\frac{1}{239}$ و

إذن : $\sin(\arg(w)) = -\frac{1}{169\sqrt{2}} < 0$

$$\arg(w) \equiv -\text{Arc tan}\left(\frac{1}{239}\right) [2\pi]$$

ملخص : $\arg(w) \equiv -\beta [2\pi]$ $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha [2\pi]$

(ج) من العلاقة (1) أعلاه نستنتج أن :

$$\arg(u^4 v) \equiv \arg(4w) [2\pi]$$

ومنه : $2\pi - 4\alpha + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta [2\pi]$ إذن :

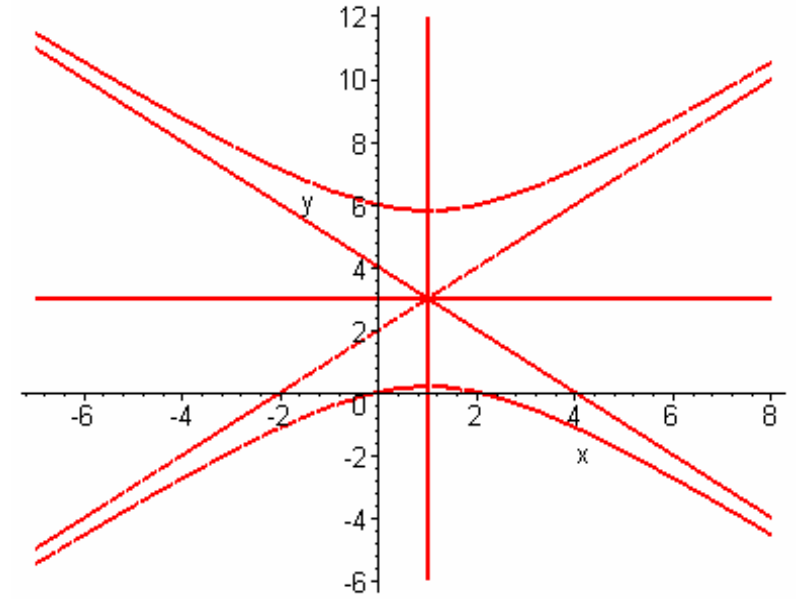
$$4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad (2)$$

من جهة أخرى :

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 4\alpha < \pi$$

و $0 < \frac{1}{239} < 1 \Rightarrow 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$

ومنه : $-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \beta < \pi$



ومنه مجموعة حلولها : $S = \{1 + i, 1 + 5i\}$

(2) أ) لدينا باستعمال صيغة حدانية نيوتن : $u^4 = 476 - 480i$

ومنه : $u^4 v = 956 - 4i = 4(239 - i)$ إذن :

$$u^4 v = 4w \quad (1)$$

(ب) لدينا : $\tan(\arg(u)) = 5$ و $\sin(\arg(u)) = \frac{5}{26} > 0$

ومنه : $\arg(u) \equiv \text{Arc tan}(5) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha [2\pi]$

$$(\forall x > 0) u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 2)$$

و منه : $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ و $u'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 4$

وهذا يعني بالخصوص أن $u(4)$ قيمة دنيا مطلقة للدالة u .

إذن : $(\forall x > 0) u(x) \geq u(4) = 2 - \ln 4 = 2(1 - \ln 2) > 0$

لأن : $1 - \ln(2) = \ln(e) - \ln(2)$ و $e > 2$ و \ln تزايدية قطعاً.

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \sqrt{x} - \ln x > 0$$

إذن :

(3) أ) الدالة g_n متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $I =]0, +\infty[$

إذن g_n تقابل من I نحو $g_n(I)$. لدينا حسب السؤال (1) :

$$g_n(I) = \mathbb{R}$$

بالخصوص 0 يقبل سابقاً وحيداً α_n ب g_n في I .

لدينا : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - \ln(n) > 0$ حسب السؤال (2)

و : $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 2\ln(n) < 0$ لأن : $n \geq 3$. هذا يعني أن :

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) < g_n(\alpha_n) < g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ومن (2) أعلاه نستنتج أن : $(\exists k \in \mathbb{Z}) 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

ومن المتفاوتة المزدوجة أعلاه نحصل على :

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + k2\pi < \pi \quad \text{أي} \quad -\frac{1}{2} < k < \frac{3}{4} \quad \text{ومنه} \quad k = 0$$

إذن : $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ ومنه :

$$4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

(1) لدينا : $(\forall x > 0) g_n'(x) = n + \frac{2}{x} > 0$ ومنه الدالة g_n

تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$ ومنه جدول تغيراتها

x	0
$g_n'(x)$	$+$
$g_n(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

(2) لندرس تغيرات الدالة : $x \mapsto u(x) = \sqrt{x} - \ln x$. لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right) e^{-x} = \left(\frac{1}{3}x^{-1} - 1 \right) x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = \frac{1-3x}{3x} f(x)$$

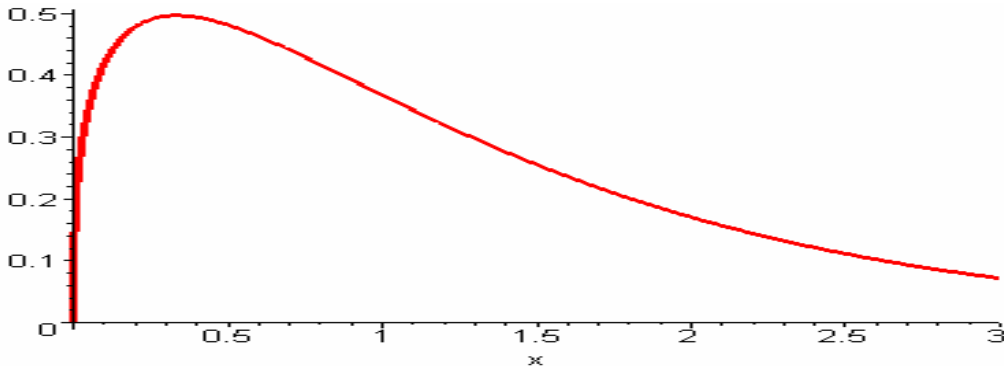
$$(\forall x > 0) f'(x) = \frac{1-3x}{3x} f(x)$$

إذن :

(ب) حسب ما سبق فإن إشارة f' هي إشارة $-3x + 1$: $x \mapsto -3x + 1$ ومنه جدول التغيرات للدالة f :

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\frac{1}{3})$	

(4) منحنى الدالة f :



$$\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

وبما أن g_n تزايدية قطعاً فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$$

(ب) لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0$ ومنه :

الجزء الثاني :

$$(I) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} e^{-x} = +\infty$$

ومنه الدالة f لا تقبل الإشتقاق في 0 على اليمين و منحناها يقبل

نصف مماس موازي لمحور الأرتاب في النقطة 0 أصل المعلم

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

لأن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

ومنه (C) يقبل محور الأفاصيل مقاربا له بجوار $+\infty$.

(3) (أ) لدينا لكل $x > 0$:

$$I = \left[\frac{1}{3}, 1 \right] \quad (\text{II})$$

(1 أ) حسب الدراسة المنجزة أعلاه فإن f متصلة وتناقصية قطعاً

$$\text{على } I \text{ ومنه: } f(I) = \left[f(1), f\left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

$$\text{لدينا: } 0,5 < 1 < f\left(\frac{1}{3}\right) < 1 \text{ و } f(1) = \frac{1}{e} > \frac{1}{3} \text{ إذن:}$$

$$\frac{1}{3} < f(1) < f\left(\frac{1}{3}\right) < 1$$

$$\text{ومنه: } f(I) \subset I$$

(ب) لدينا: $f'(x) = v(x)f(x)$ حيث $v(x) = \frac{1-3x}{3x}$ وهي دالة متخاطبة تناقصية قطعاً على I (لأن: المحددة:

$$v(I) = \left[v(1), v\left(\frac{1}{3}\right) \right] = \left[-\frac{2}{3}, 0 \right] \text{ ومنه: } \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

بالخصوص: $(\forall x \in I) |v(x)| \leq \frac{2}{3}$ وبما أن:

$$(\forall x \in I) |f(x)| \leq 1$$

$$\text{فإن: } (\forall x \in I) |f'(x)| = |v(x)| |f(x)| \leq \frac{2}{3}$$

$$\boxed{(\forall x \in I) |f'(x)| \leq \frac{2}{3}} \text{ ملخص:}$$

(ج) لدينا

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{3} \ln(x) - x = \ln(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) - 3x = 3 \ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ g_3(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \alpha_3$$

(2 أ) بالترجع: $u_0 = \frac{1}{3} \in I$ واضح.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I \Rightarrow u_{n+1} \in I$$

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I} \text{ ومنه:}$$

(ب) حسب السؤال (1 ج) فإن: $f(\alpha_3) = \alpha_3$ وحسب السؤال (3 أ)

$$\text{فإن: } \frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ومنه: } \alpha_3 \in I$$

$$\text{لكل } n \in \mathbb{N} |u_{n+1} - \alpha_3| = |f(u_n) - f(\alpha_3)|$$

بما أن f قابلة للإشتقاق على I و بما أن كلا من u_n و α_3 عنصران من I فإنه حسب مبرهنة التزايد المتناهية يوجد عنصر c_n ما بين u_n و α_3 بحيث :

$$f(u_n) - f(\alpha_3) = f'(c_n)(u_n - \alpha_3)$$

ومنه :

$$|u_{n+1} - \alpha_3| = |f'(c_n)| |u_n - \alpha_n| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_n|$$

لأن $c_n \in I$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_n|$$

إذن :

(ج) بالترجع :

لأجل $n = 0$ يكفي أن نبين أن :

$$\left| \alpha_3 - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{2}{3}$$

نعلم أن $\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه :

$$\sqrt{3} < 3 : \text{لأن } \left| \alpha_3 - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{3} < \frac{2}{3}$$

نفترض أن $|u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ لأجل $n \in \mathbb{N}$.

حسب نتيجة السؤال ب) أعلاه :

$$|u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

ومنه :

(د) المتتالية الهندسية $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ تتوّل إلى 0 لأن $\frac{2}{3} < 1$ وحسب

المتفاوتة أعلاه فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha_3 \text{ متقاربة و } (u_n)_{n \geq 0} \text{ المتتالية}$$

$$(\forall x \in [0, +\infty[) \quad F(x) = \int_x^{8x} f(t) dt \quad \text{(III)}$$

(1) أ) الدالة f متصلة على $[0, +\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية G على $[0, +\infty[$ ومنه :

$$(\forall x \in [0, +\infty[) \quad F(x) = G(8x) - G(x)$$

إذن F كفرق مركبات دوال قابلة للإشتقاق تقبل الإشتقاق على $[0, +\infty[$.

ب) لدينا لكل x من $[0, +\infty[$:

$$F'(x) = 8G'(8x) - G'(x) = 8f(8x) - f(x)$$

وبما أن $f \geq 0$ على $[x, 8x]$ فإن $F(x) \geq 0$ ومنه :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$$

ب) نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-7x}) = 1$ إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2f(x)(1 - e^{-7x})) = 0$ وحسب المتفاوتة المزدوجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

أعلاه فإن :

ج) جدول التغيرات للدالة F :

x	0	$\frac{4 \ln 2}{7}$	$+\infty$
$F'(x)$		+	-
$F(x)$	0	$F\left(\frac{4 \ln 2}{7}\right)$	0

$$F'(x) = 16\sqrt[3]{x} e^{-8x} - \sqrt[3]{x} e^{-x} = \sqrt[3]{x} e^{-x} (16e^{-7x} - 1)$$

$$(\forall x \in [0, +\infty[) F'(x) = \sqrt[3]{x} e^{-x} (16e^{-7x} - 1)$$

ومنه :

$$(\forall x \in [0, +\infty[) F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = \frac{4 \ln(2)}{7}$$

$$(\forall x \in [0, +\infty[) F'(x) > 0 \Leftrightarrow 16e^{-7x} > 1 \Leftrightarrow x < \frac{4 \ln(2)}{7}$$

ومنه تغيرات F :

$$F \times \text{تزايدية قطاعا على } \left[0, \frac{4 \ln 2}{7}\right]$$

$$F \times \text{تناقصية قطاعا على } \left[\frac{4 \ln 2}{7}, +\infty\right]$$

$$F\left(\frac{4 \ln 2}{7}\right) \times \text{قيمة قصوى مطلقة للدالة } F.$$

2) أ) ليكن $x \in \mathbb{R}^+$ لدينا $x \leq 8x$ ومنه :

$$(\forall t \in [x, 8x]) \sqrt[3]{t} \leq \sqrt[3]{8x} = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\text{إذن : } F(x) = \int_x^{8x} \sqrt[3]{t} e^{-t} dt \leq 2\sqrt[3]{x} \int_x^{8x} e^{-t} dt$$

$$= 2\sqrt[3]{x} [-e^{-t}]_x^{8x} = 2\sqrt[3]{x} (e^{-x} - e^{-8x})$$

$$= 2\sqrt[3]{x} e^{-x} (1 - e^{-7x}) = 2f(x)(1 - e^{-7x})$$