

الثانية بكالوريا علوم رياضية الرياضيات	تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2007	الأستاذ : الحيان
التمرين الأول :		
<p>I. ليكن $E = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ لدينا : $\forall (a,b) \in E^2 : a \perp b = a+b - ab\sqrt{2}$. 1. أ- ليكن $(a,b) \in E^2$ لدينا :</p>		
$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(2ab+1-a\sqrt{2}-b\sqrt{2}) = a+b - ab\sqrt{2} = a \perp b$		
<p>ب- ليكن $(a,b) \in E^2$ لدينا : $a \in E \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a\sqrt{2}-1 \neq 0$ و $b \in E \Leftrightarrow b\sqrt{2}-1 \neq 0$. إذن :</p>		
<p>$(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) \neq 0$ ومنه فإن : $a \perp b - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) \neq 0$ أي : $a \perp b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه فإن : $a \perp b \in E$. وبالتالي فإن : $\forall (a,b) \in E^2 : a \perp b \in E$.</p>		
<p>إذن \perp قانون تركيب داخلي في E . 2. لدينا : \perp قانون تركيب داخلي في E .</p>		
<p>وبما أن الجمع والضرب قانونين تبادليين وتجميعيين في \mathbb{R} ، فإن \perp قانون تبادلي وتجميعي في E . لدينا : $0 \perp a = a$ و $a \perp 0 = a$: $\forall a \in E$. إذن 0 هو العنصر المحايد بالنسبة لـ \perp في E . ليكن $(a,b) \in E^2$ لدينا :</p>		
$a \perp b = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) = 0$ $\Leftrightarrow (a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) = 1$ $\Leftrightarrow b\sqrt{2}-1 = \frac{1}{a\sqrt{2}-1}$ $\Leftrightarrow b\sqrt{2} = \frac{1}{a\sqrt{2}-1} + 1$ $\Leftrightarrow b\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}-1}$ $a \perp b = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = \frac{a}{a\sqrt{2}-1}}$		
<p>وبما أن : $0 = -1 \Leftrightarrow a\sqrt{2} = a\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}-1} \Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ وهذا غير ممكن، فإن : $b \in E$ وبالتالي فإن لكل $a \in E$ مماثل وحيد $b = \frac{a}{a\sqrt{2}-1}$ في E بالنسبة للقانون \perp . وبالتالي فإن : (E, \perp) زمرة تبادلية .</p>		
<p>II. نعلم أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .</p>		
<p>\mathcal{F} مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على شكل $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$ حيث $a \in E$.</p>		

نضع : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = -2A$$

$$1. \text{ أ- لدينا : } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2A$$

$$\text{ولدينا : } M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix} = M(a)$$

$$\text{ب- ليكن } (a,b) \in E^2 \text{ . لدينا : } M(a) \times M(b) = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A \right) \times \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A \right) = I + \frac{ab}{2}A^2 + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{b}{\sqrt{2}}A$$

$$M(a) \times M(b) = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A \right) \times \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A \right) = I - abA + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{b}{\sqrt{2}}A = I + \frac{a+b-ab\sqrt{2}}{\sqrt{2}}A$$

$$M(a) \times M(b) = I + \frac{a \perp b}{\sqrt{2}}A = M(a \perp b)$$

إذن : $M(a) \times M(b) = M(a \perp b)$ و $a \perp b \in E$ (حسب السؤال 1.1.ب)

ومنه فإن : $M(a) \times M(b) = M(a \perp b) \in \mathcal{F}$. إذن \mathcal{F} جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2. نعتبر التطبيق :

$$\varphi : (E, \perp) \rightarrow (\mathcal{F}, \times)$$

$$a \mapsto \varphi(a) = M(a)$$

أ- ليكن $(a,b) \in E^2$. لدينا : $\varphi(a \perp b) = M(a \perp b) = M(a) \times M(b) = \varphi(a) \perp \varphi(b)$

إذن : φ تشاكل من (E, \perp) نحو (\mathcal{F}, \times) .

ليكن $B \in \mathcal{F}$ ، إذن : $\exists a \in E / B = M(a)$. إذن : $\exists a \in E / B = \varphi(a)$.

وعليه فإن φ شمولي من E نحو \mathcal{F} .

$$\text{ولدينا : } \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow M(a) = M(b) \Rightarrow I + \frac{a}{\sqrt{2}}A = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}}A = \frac{b}{\sqrt{2}}A \Rightarrow a = b$$

إذن : φ تبايني من E نحو \mathcal{F} .

وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من (E, \perp) نحو (\mathcal{F}, \times) .

ب- بما أن φ تشاكل تقابلي من (E, \perp) نحو (\mathcal{F}, \times) و (E, \perp) زمرة تبادلية ، فإن (\mathcal{F}, \times) زمرة تبادلية .

التمرين 2 :

ليكن $a \in \mathbb{C} - \{-i, i\}$

1. أ- نعتبر في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$: (E) . ليكن : $u = a+i$. لدينا :

$$\begin{aligned} u^2 - (1+a)(1+i)u + (1+a^2)i &= (a+i)^2 - (1+a)(1+i)(a+i) + (1+a^2)i \\ &= a^2 + 2ai - 1 - (1+a)(a+i+ai-1) + i + a^2i \\ &= a^2 + 2ai - 1 - a - i - ai + 1 - a^2 - ai - a^2i + 1 + i + a^2i \\ u^2 - (1+a)(1+i)u + (1+a^2)i &= 0 \end{aligned}$$

إذن : $u = a+i$ حل للمعادلة (E) .

ب- ليكن v الحل الآخر للمعادلة (E) . لدينا :

$$\begin{aligned} u+v &= -\frac{b}{a} = (1+a)(1+i) \Rightarrow v = (1+a)(1+i) - u \\ &\Rightarrow v = (1+a)(1+i) - (a+i) \\ &\Rightarrow v = 1+i+a+ai - a-i \\ &\Rightarrow \boxed{v = 1+ai} \end{aligned}$$

2. نفترض أن : $|a|=1$. إذن : $a\bar{a} = |a|^2 = 1$ ، ومنه فإن : $\boxed{\bar{a} = \frac{1}{a}}$.

أ- بما أن : $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$: فإن ، $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\bar{u}}{v} = \frac{\overline{a+i}}{1+ai} = \frac{\bar{a}-i}{1-\bar{a}i} = \frac{1-i}{1-\frac{i}{a}} = \frac{1-ai}{a-i} = \frac{i(1-ai)}{i(a-i)} = \frac{a+i}{1+ai} = \frac{u}{v}$

ب- لدينا : $a[(a-\bar{a})+2i] = a^2 - a\bar{a} + 2ai = a^2 - 1 + 2ai = (a+i)^2 = u^2$ $\boxed{u^2 = a[(a-\bar{a})+2i]}$

ج- لدينا : $\arg(u^2) \equiv 2\arg(u) [2\pi]$ ولدينا : $\arg(u^2) \equiv \arg(a[(a-\bar{a})+2i]) [2\pi]$

$$\equiv \arg(a) + \arg((a-\bar{a})+2i) [2\pi]$$

ولدينا : $(a-\bar{a})+2i = 2i \Im m(a) + 2i = 2(\Im m(a)+1)i$

ولدينا : $|\Im m(a)| \leq |a| \Rightarrow |\Im m(a)| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \Im m(a) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \Im m(a)+1 \leq 2$

ومنه فإن : $\arg((a-\bar{a})+2i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$: إذن . $(a-\bar{a})+2i = \left[2(\Im m(a)+1), \frac{\pi}{2}\right]$

وعليه فإن : $2\arg(u) \equiv \arg(a) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$ أي . $\arg(u^2) \equiv \arg(a) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$

وبالتالي فإن : $\boxed{\arg(u) \equiv \frac{1}{2}\arg(a) + \frac{\pi}{4} [\pi]}$

طريقة 1 :

لدينا : $|u+iv| = |2i| = 2$ ، ومنه فإن $u+iv = a+i+i(1+ai) = 2i$ ، و $|u|+|v| = |u|+|iv| \geq |u+iv|$

وبالتالي فإن : $\boxed{|u|+|v| \geq 2}$

طريقة 2 :

لدينا : $|a|=1$. إذن : $a\bar{a} = 1$ ومنه فإن :

$$|u|+|v| = |a+i|+|1+ai| = |a+i|+|a\bar{a}+ai| = |a+i|+|a|\bar{a}+i| = |a+i|+|\bar{a}+i| \geq |a+i+\bar{a}+i|$$

ولدينا : $a+i+\bar{a}+i = a+\bar{a}+2i = 2\Re(a)+2i = 2(\Re(a)+i)$

إذن : $|a+i+\bar{a}+i| = 2|\Re(a)+i| = 2\sqrt{(\Re(a))^2+1}$

وبما أن :

$$\begin{aligned}
|\Re(a)| \leq |a| &\Rightarrow |\Re(a)| \leq 1 \\
&\Rightarrow -1 \leq \Re(a) \leq 1 \\
&\Rightarrow 0 \leq (\Re(a))^2 \leq 1 \\
&\Rightarrow 1 \leq 1 + (\Re(a))^2 \leq 2 \\
&\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1 + (\Re(a))^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Re(a)| \leq |a| &\Rightarrow 2 \leq 2\sqrt{1 + (\Re(a))^2} \\
&\Rightarrow 2 \leq |a+i + \bar{a}+i|
\end{aligned}$$

إذن : $|u|+|v| \geq |a+i + \bar{a}+i|$ و $|a+i + \bar{a}+i| \geq 2$ ، ومنه نستنتج أن :

$$|u|+|v| \geq 2$$

II. المستوى العقدي \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. ليكن $m \in]2, +\infty[$.

نعتبر (E_m) مجموعة النقاط $M(a)$ من المستوى العقدي \mathcal{P} بحيث : $|u|+|v|=m$.

1. نعلم أن : $|u|+|v|=|a+i|+|a-i|$.

لتكن $F(i)$ و $F'(-i)$ نقطتين من المستوى العقدي \mathcal{P} اللتان لحقاهما على التوالي i و $-i$.

لدينا : $|u|+|v|=m \Leftrightarrow |a+i|+|a-i|=m \Leftrightarrow MF + MF' = m$.

وبما أن المسافة البؤرية $FF' = |z_{F'} - z_F| = |-i - i| = |-2i| = 2$ و $FF' = |z_{F'} - z_F| = |-i - i| = |-2i| = 2$ ، فإن :

$m = 2b \geq 2c$. إذن : (E_m) إهليلج مركزه منتصف القطعة $[FF']$ أي O أصل المعلم .

2. نضع : $a = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

أ- لدينا :

$$M(a) \in (E_m) \Leftrightarrow |u|+|v|=m$$

$$\Leftrightarrow MF + MF' = m$$

نعلم أن : $F(0,1)$ و $F'(0,-1)$ و $M(x,y)$ ،

إذن : $\overline{MF}(-x, 1-y)$ و $\overline{MF'}(-x, -1-y)$.

ومنه فإن : $MF^2 = x^2 + (1-y)^2$ و $MF'^2 = x^2 + (1+y)^2$.

إذن : $MF^2 - MF'^2 = -4y$ ، ومنه $(MF - MF')(MF + MF') = -4y$ ،

وبما أن : $MF + MF' = m$ ،

فإن : $m(MF - MF') = -4y$.

أي : $MF - MF' = -\frac{4}{m}y$.

$$MF + MF' = m$$

(+)

$$MF - MF' = -\frac{4}{m}y$$

وعليه فإننا نجد :

$$2MF = m - \frac{4}{m}y$$

$$MF^2 = \left(\frac{m}{2} - \frac{2}{m}y \right)^2 = \frac{m^2}{4} - 2y + \frac{4}{m^2}y^2 : \text{ ومنه فإن } MF = \frac{m}{2} - \frac{2}{m}y$$

$$\cdot \frac{m^2}{4} - 2y + \frac{4}{m^2}y^2 = x^2 + (1-y)^2 : \text{ فإن } MF^2 = x^2 + (1-y)^2$$

$$\cdot \frac{m^2}{4} + \frac{4}{m^2}y^2 = x^2 + 1 + y^2 \text{ يكافئ } \frac{m^2}{4} - 2y + \frac{4}{m^2}y^2 = x^2 + 1 - 2y + y^2$$

$$\cdot \boxed{x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1} : \text{ وبالتالي فإن معادلة ديكارتية للإهليلج } (E_m) \text{ هي :}$$

بطريقة أخرى :

نعلم أن معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) تكتب على شكل :

$$\cdot c = \frac{FF'}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ و } 2b = m \Rightarrow b = \frac{m}{2} \text{ و } x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 \text{ أي } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\cdot c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - c^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1^2 = \frac{m^2}{4} - 1$$

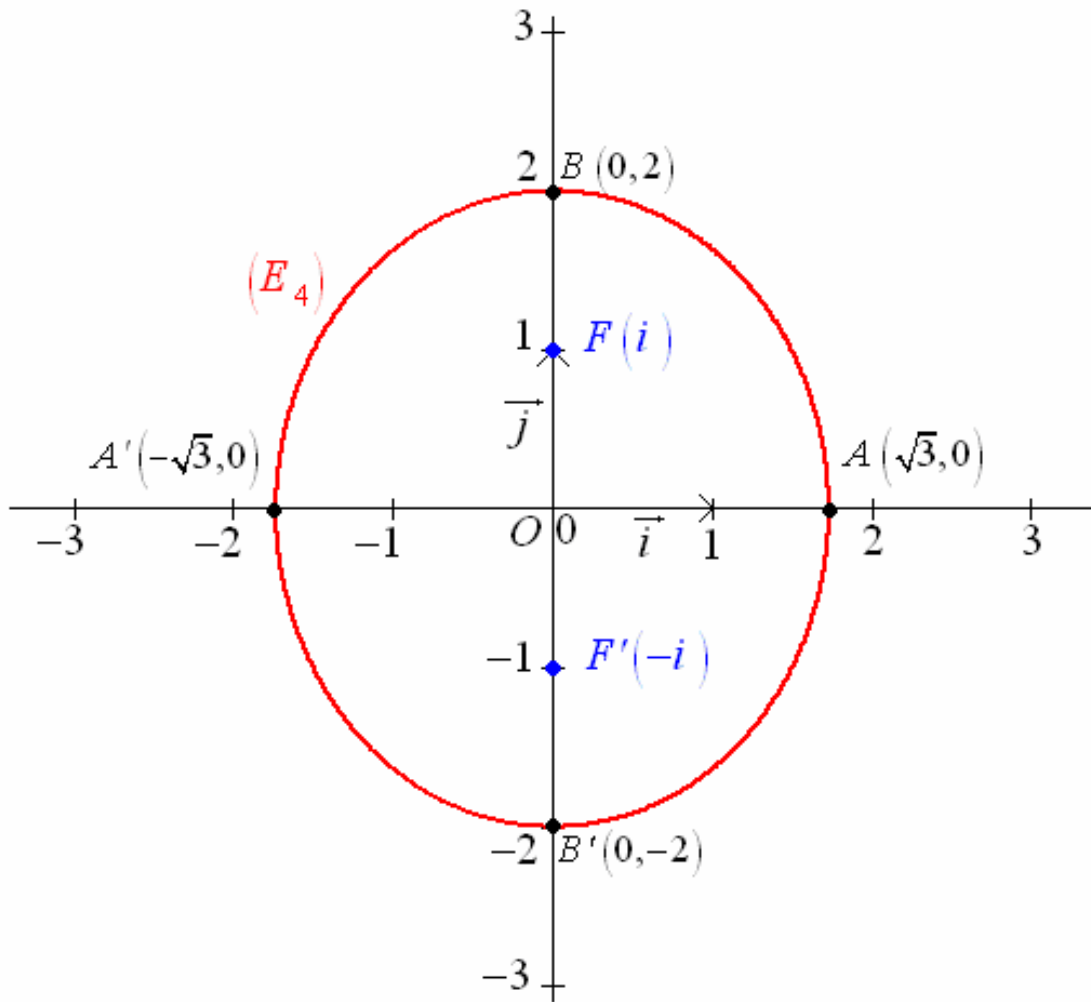
$$\cdot \boxed{x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1} : \text{ وبالتالي فإن ديكارتية للإهليلج } (E_m) \text{ هي :}$$

$$\cdot (E_4) : \frac{x^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 : \text{ إذن } (E_4) : x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 3$$

$$\cdot c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} = 1 : \text{ ومنه فإن } b = 2 \text{ و } a = \sqrt{3}$$

ومنه فإن (E_4) إهليلج :

- مركزه O
- رؤوسه $A(\sqrt{3}, 0)$ و $A'(-\sqrt{3}, 0)$ و $B(0, 2)$ و $B'(0, -2)$
- بؤرتيه $F(0, 1)$ و $F'(0, -1)$
- تباعده المركزي $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}$



3. طريقة 1 :

$$x^2 + \left(1 - \frac{4}{8^2}\right)y^2 = \frac{8^2}{4} - 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \quad : \left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) \text{ معادلة الإهليلج}$$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{y - 0}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2 \quad : \text{ معادلة المستقيم } (AB) \text{ هي}$$

$$(*) : \begin{cases} x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{cases} \quad : \text{ لنجد د تقاطع المستقيم } (AB) \text{ والإهليلج } \left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) \text{ بحل النظمة}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{9}{4} = \frac{9}{7} \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49x^2 - 42\sqrt{3}x + 27 = 0 \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7x - 3\sqrt{3})^2 = 0 \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{7} \\ y = \frac{8}{7} \end{cases}$$

ومنه فإن المستقيم (AB) والإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ يتقاطعان وفق النقطة $\Omega\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$.

نعلم أن معادلة المماس للإهليلج $x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7}$ في النقطة Ω هي :

$$\begin{aligned} xx_0 + \frac{9}{16}yy_0 &= \frac{9}{7} \Leftrightarrow x \frac{3\sqrt{3}}{7} + \frac{9}{16}y \frac{8}{7} = \frac{9}{7} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{7}\sqrt{3}x + \frac{9}{14}y = \frac{9}{7} \\ &\Leftrightarrow 2x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\Omega\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$.

طريقة 2 :

$$x^2 + \left(1 - \frac{4}{8^2}\right)y^2 = \frac{8^2}{4} - 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{16}{7} - \frac{16}{9}x^2} \quad : \left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) \text{ معادلة الإهليلج}$$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x) = \sqrt{\frac{16}{7} - \frac{16}{9}x^2}$: $\forall x \in \left[-\frac{3\sqrt{7}}{7}, \frac{3\sqrt{7}}{7}\right]$

$$\cdot \frac{x - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{y - 0}{2} \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2}$$
 معادلة (AB) هي :

(AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ ، إذا وجد عدد حقيقي $\left[-\frac{3\sqrt{7}}{7}, \frac{3\sqrt{7}}{7}\right]$ $x \in$ بحيث : $g'(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\cdot \text{أو } -g'(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

لدينا : $g'(x) = -\frac{16}{9} \frac{x}{\sqrt{\frac{16}{7} - \frac{16}{9}x^2}}$ و $g'(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{7}$ ومنه $y = g\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right) = \frac{8}{7}$

$$\cdot \text{لدينا : } \Omega\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right) \in \left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$$

ولدينا معادلة المماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة Ω تحدد بما يلي :

$$x \frac{3\sqrt{3}}{7} + \frac{9}{16}y \frac{8}{7} = \frac{9}{7} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x + \frac{9}{2}y = 9 \Leftrightarrow y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2$$

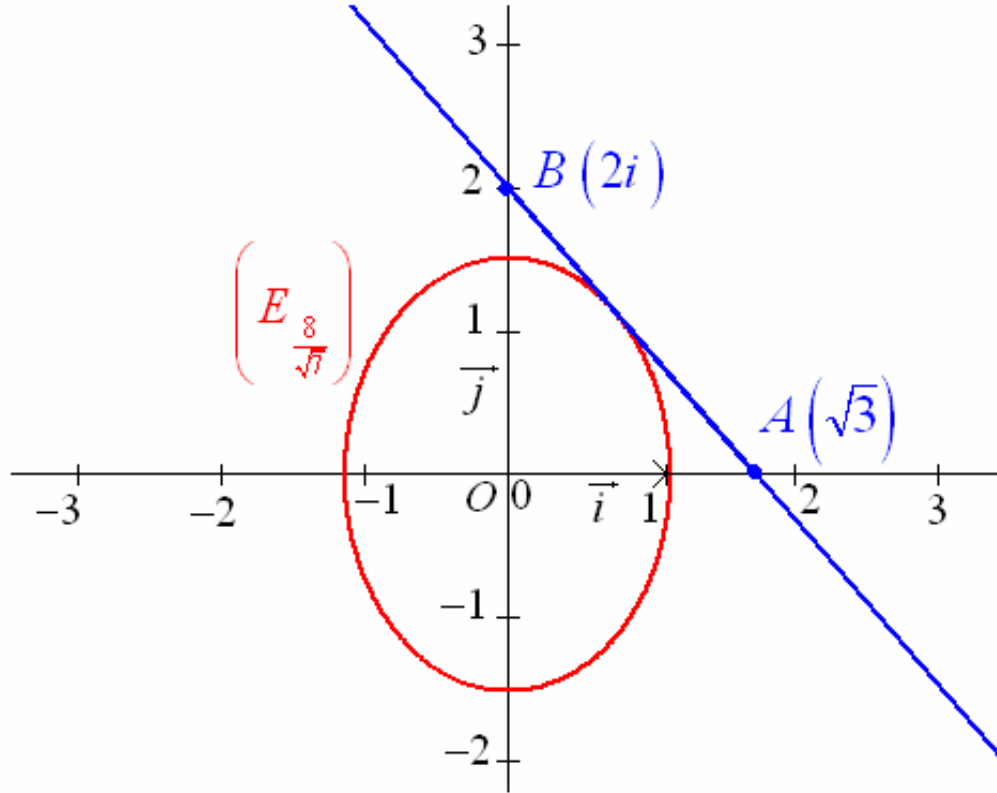
وهي المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) .

وبالتالي فإن (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$

ولدينا : $x = -\frac{3\sqrt{3}}{7}$ $\Leftrightarrow -g'(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ومنه $y = -g\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right) = -\frac{8}{7}$.

إذن : $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{7}, -\frac{8}{7}\right) \in \left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ و لدينا معادلة المماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة Ω هي :

. هذه المعادلة ليست المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) ، إنما هي المعادلة المختصرة للمستقيم الموازي لـ (AB) والمار من Ω' .



التمرين الثالث :

1. نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $195x - 232y = 1$: (E) .

أ- **طريقة 1 :** لدينا :

$$\begin{array}{r|l} 232 & 2 \\ 116 & 2 \\ 58 & 2 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

إذن : $195 = 3 \times 5 \times 13$ و $232 = 2^3 \times 29$.

ومنه فإن : $195 \wedge 232 = 1$.

طريقة 2 : حسب تقنية القسمة الأقليدية المتتابعة لأقليدس ، لدينا :

$$\begin{array}{r|l}
 \times 58 & 232 = 195 \times 1 + 37 \\
 \times (-11) & 195 = 37 \times 5 + 10 \\
 \times 3 & 37 = 10 \times 3 + 7 \\
 \times (-2) & 10 = 7 \times 1 + 3 \\
 \times 1 & 7 = 3 \times 2 + 1 \\
 \hline
 & 3 = 1 \times 3 + 0
 \end{array}$$

$$58 \times 232 - 11 \times 195 = 58 \times 195 + 1$$

$$\Leftrightarrow 58 \times 232 - 69 \times 195 = 1$$

ومنه نستنتج أن $232 \wedge 195 = 1$. بالإضافة إلى معاملي Bezout .
ب- لدينا :

$$\begin{array}{r}
 \ominus \\
 \hline
 195x - 232y = 1 \\
 195 \times (-69) + 232 \times 58 = 1
 \end{array}$$

$$195(x + 69) - 232(y + 58) = 0$$

$$\Leftrightarrow 195(x + 69) = 232(y + 58) \quad (*)$$

إذن : $232 \mid x + 69 \xRightarrow{\text{Gauss}} 232 \mid 195(x + 69)$. ومنه فإن : $x + 69 = 232h$ / $\exists h \in \mathbb{R}$

أي : $x = -69 + 232h$ / $\exists h \in \mathbb{R}$. نعوض هذا التعبير في العلاقة (*) ، فنجد :

$$195 \times 232h = 232(y + 58) \Leftrightarrow 195h = y + 58 \Leftrightarrow y = -58 + 195h$$

ومنه فإن : $(x, y) = (-69 + 232h, -58 + 195h)$ حيث $h \in \mathbb{Z}$. أي :

$$(x, y) = (-69 + 232 + 232(h - 1), -58 + 195 + 195(h - 1))$$

يكافئ : $(x, y) = (163 + 232(h - 1), 137 + 195(h - 1))$ وبوضع $k = h - 1$ ، نجد : $k \in \mathbb{Z}$ و

$$(x, y) = (163 + 232k, 137 + 195k) \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} .$$

وبما أن الأزواج $(163 + 232k, 137 + 195k)$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، تحقق المعادلة (E) ، فإن مجموعة

$$S = \{(163 + 232k, 137 + 195k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ حلول المعادلة (E) هي :}$$

ج- ليكن d عددا صحيحا طبيعيا بحيث $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1[232]$.

لدينا : $\exists m \in \mathbb{Z} \mid 195d - 232m = 1$. حسب السؤال 1.ب ، لدينا :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \mid d = 163 + 232k \text{ . إذن : } \exists k \in \mathbb{Z} \mid (d, m) = (163 + 232k, 137 + 195k)$$

$$0 \leq d \leq 232 \Leftrightarrow 0 \leq 163 + 232k \leq 232$$

$$\Leftrightarrow -163 \leq 232k \leq 69$$

$$\Leftrightarrow -\frac{163}{232} \leq k \leq \frac{69}{232}$$

وبما أن : $k \in \mathbb{Z}$ و $\frac{69}{232} \approx 0,29$ و $-\frac{163}{232} \approx -0,70$ ، فإن : $k = 0$. إذن : $d = 163$.

2. لدينا : $N = 233$. $N = pq + r$; $0 \leq r < p$

p	q	r	p^2
2	116	1	4
3	77	2	9
5	46	3	25
7	33	2	49
11	21	2	121
13	17	12	169
17	13	12	289 Stop

إذن $N = 233$ عدد أولي .

نتوقف في حالة $q < p$ (أو $p^2 > N$) .

3. لتكن $A = \mathbb{N} \cap [0, 232]$. ليكن $f : A \rightarrow A$ تطبيقاً يربط كل عنصر $a \in A$ بالعنصر $f(a)$ حيث

$f(a)$ هو باقي القسمة الأقلية للعدد a^{195} على 233 .

نقبل أن : $\forall a \in A \setminus \{0\} : a^{232} \equiv 1 [233]$.

مبرهنة فيرما : إذا كان n عدداً صحيحاً طبيعياً أولياً ، فإن : $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a^{n-1} \equiv 1 [n]$

أ- ليكن $(a, b) \in A^2$ بحيث $f(a) = b$. لدينا $f(a)$ هو باقي القسمة الأقلية للعدد a^{195} على 233 .

إذن : $a^{195} \equiv f(a) [233]$ و $0 \leq f(a) < 233$. ومنه فإن : $a^{195} \equiv b [233]$ و $0 \leq b < 233$.

ومنه فإن : $a^{195 \times 163} \equiv b^{163} [233]$ ولدينا : $195 \times 163 \equiv 1 [232]$. إذن : $195 \times 163 = 1 + 232k$ حيث

$k \in \mathbb{Z}$. إذن : $a^{1+232k} \equiv b^{163} [233]$. نعلم أن : $a^{232} \equiv 1 [233]$ ، إذن : $a^{232k} \equiv 1 [233]$.

وعليه فإن : $a^{1+232k} \equiv 1 [233]$. إذن : $a \equiv b^{163} [233]$ و $0 \leq a \leq 232 < 233$.

وبالتالي نستنتج أن a هو باقي القسمة الأقلية لـ b^{163} على 233 .

ج- حسب 3.أ ، لدينا f تقابل من A نحو A ولدينا $f^{-1} : A \rightarrow A$ هو التطبيق الذي يربط كل عنصر

$b \in A$ بالعنصر $f(b)$ حيث $f(b)$ هو باقي القسمة الأقلية لـ b^{163} على 233 .

التمرين الرابع :

1. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = 1 + (x-1)e^x$$

1. ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $g(x) = 1 + (x-1)e^x = 1 - e^x + xe^x$.

إذن : $g'(x) = (1 + (x-1)e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$. إشارة $g'(x)$ هي إشارة x .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + xe^x - e^x = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x-1)e^x = +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	0	$+\infty$

0 قيمة دنيا مطلقة للدالة g على \mathbb{R} . إذن : $g(x) \geq 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. لدينا $g(0) = 0$ ولدينا :

g تناقصية قطعاً على $]-\infty, 0[$. إذن : $x < 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$:

g تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$. إذن : $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$:

وبالتالي فإن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : g(x) > 0$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = \boxed{0}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - 1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0-1} = \boxed{0}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1 = f(0)$.

إذن f متصلة في 0 .

3. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)' = \frac{x'(e^x - 1) - x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-1 - (x-1)e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

ب- إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R}^* هي إشارة $-g(x)$. ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} .

3. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \boxed{+\infty}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$+\infty$		0

4. ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $J(x) = \int_0^x te^{-t} dt$

$$\left| \begin{array}{l} u(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = 1 \end{array} \right. : \text{إذن ،} \left| \begin{array}{l} u'(t) = e^{-t} \\ v(t) = t \end{array} \right. : \text{نضع :}$$

لدينا : u و v متصلتان وقابلتان للاشتقاق على \mathbb{R} . حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$J(x) = \int_0^x te^{-t} dt = \int_0^x u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t) dt$$

$$J(x) = [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} - 0 - [e^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$\boxed{J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)}$$
 وبالتالي فإن :

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $J(x) = \int_0^x te^{-t} dt$

إذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ ، فإن : $0 \leq t \leq x \Rightarrow -x \leq -t \leq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq e^{-t} \leq 1 \Rightarrow te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$

$$\int_0^x te^{-x} dt \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x t dt \Rightarrow e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \Rightarrow \frac{x^2}{2} e^{-x} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\cdot \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$
 ومنه فإن :

إذا كان $x \in \mathbb{R}^-$ ، فإن : $t \leq 0 \Rightarrow x \leq t \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -t \leq -x \Rightarrow 1 \leq e^{-t} \leq e^{-x} \Rightarrow te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$

$$\int_x^0 te^{-x} dt \leq \int_x^0 te^{-t} dt \leq \int_x^0 t dt \Rightarrow e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0 \leq -J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} e^{-x} \leq -J(x) \leq -\frac{x^2}{2}$$

$$\cdot \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$
 وعليه فإن : $\frac{x^2}{2} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-x}$ ، ومنه فإن :

هذه العلاقة تظل صحيحة من أجل $x = 0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}}$$
 وبالتالي فإن :

ج- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$ و $\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$

$$\frac{1}{2} e^x e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^x e^{-\frac{x-|x|}{2}} : \text{ومنه ،} \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq e^{-x}(e^x - 1 - x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}}$$
 وبالتالي فإن :

د- لدينا : $\frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$ ، $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}} = \frac{1}{2}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} = \frac{1}{2}$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

حسب خاصيات الترتيب والنهيات ، لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا : $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

5. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$f''(x) = \left(\frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} \right)' = \frac{-g'(x)(e^x - 1)^2 + g(x)((e^x - 1)^2)'}{(e^x - 1)^4} = \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 + 2e^x g(x)(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 + 2e^x g(x)(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (-x(e^x - 1) + 2g(x))$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (-xe^x + x + 2 + 2(x - 1)e^x)$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (e^x(x - 2) + 2 + x)$$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، نضع : $h(x) = e^x(x - 2) + 2 + x$ ، لدينا :

$$h'(x) = (e^x(x - 2) + 2 + x)' = e^x + e^x(x - 2) + 1 = e^x(x - 1) + 1 = g(x) \geq 0$$

إذن h تزايدية على \mathbb{R} . وبما أن $h(0) = 0$ ، فإن :

$$\begin{aligned} x \leq 0 &\Rightarrow h(x) \leq h(0) & x \geq 0 &\Rightarrow h(x) \geq h(0) \\ &\Rightarrow h(x) \leq 0 & &\Rightarrow h(x) \geq 0 \end{aligned}$$

ج- لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \times \frac{h(x)}{e^x - 1}$.

إشارة $f''(x)$ على \mathbb{R}^* هي إشارة $\frac{h(x)}{e^x - 1}$.

ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \text{ و } h(x) < 0$$

$$\Rightarrow e^x - 1 < 0 \text{ و } h(x) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{h(x)}{e^x - 1} > 0$$

$$\Rightarrow f''(x) > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \text{ و } h(x) > 0$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > 0 \text{ و } h(x) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{h(x)}{e^x - 1} > 0$$

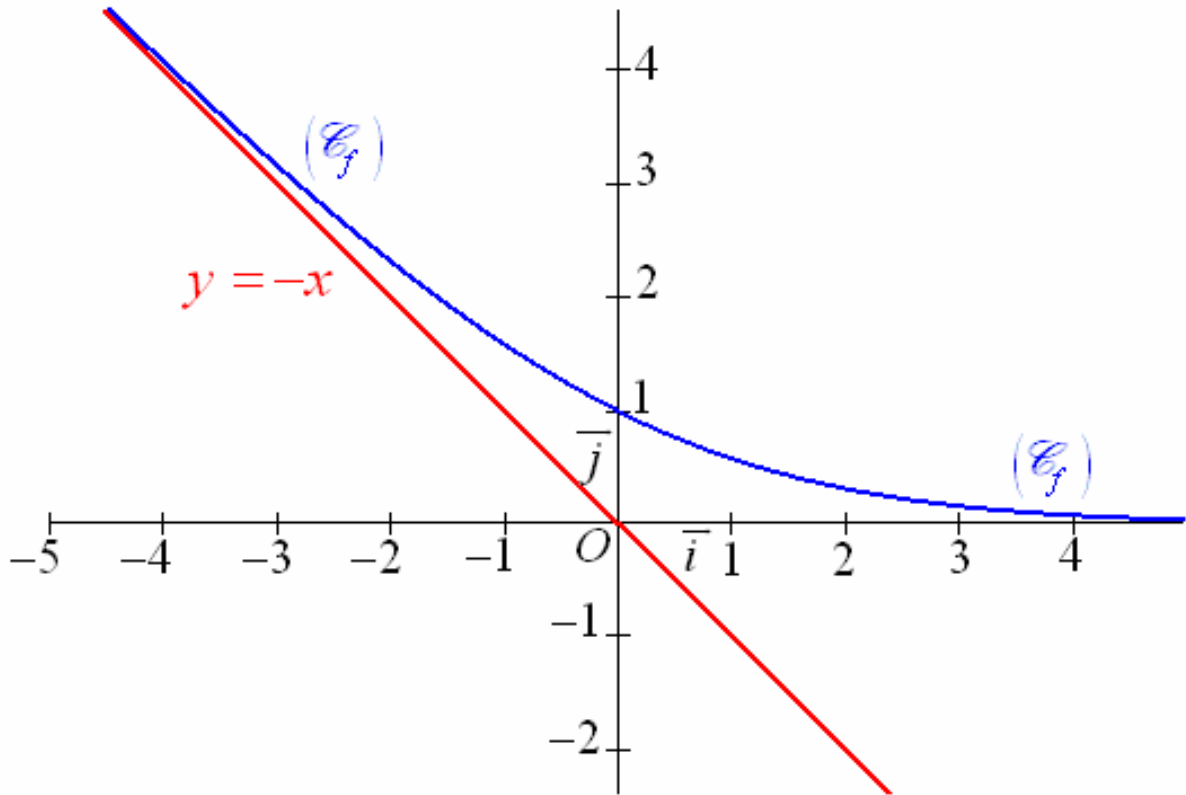
$$\Rightarrow f''(x) > 0$$

في كلتا الحالتين ، لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f''(x) > 0$.

د- إنشاء المنحنى (\mathcal{C}_f) في المستوى \mathcal{P} المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \bar{i}, \bar{j}) :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن (\mathcal{C}_f) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$ إذن (\mathcal{C}_f) يقبل مقاربا مائلا بجوار $-\infty$ معادلته $y = -x$.



III. لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. ليكن $x \in \mathbb{R}^*$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{e^x - 1} - 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } \frac{1}{e^x - 1} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = 2 \\ f(x) = x &\Leftrightarrow x = \ln 2 \end{aligned}$$

ولدينا $f(0) = 1 \neq 0$. إذن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$ في \mathbb{R} .

$$2. \text{ أ- ليكن } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ، لدينا : } f'(x) = \frac{-1 - (x-1)e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} \leq 0$$

ولدينا : $f''(x) > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}^*$. إذن f' تزايدية على \mathbb{R}^+ .

$$\text{إذن : } x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) \Rightarrow f'(x) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه فإن : } -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^+ .$$

$$\text{وبالتالي فإن : } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+ : |f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$$

ب- لدينا f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^+ و f' متصلة على المجال $]0, +\infty[$. حسب مبرهنة **التزايديات**

المنتهية، لدينا : $f(x) - f(\ln 2) = f'(c)(x - \ln 2)$: $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; \exists c \in \mathbb{R}^+ /$ حيث c محصور بين

$$\ln 2 \text{ و } x . \text{ إذن : } |f(x) - f(\ln 2)| = |f'(c)| |x - \ln 2| . \text{ وبما أن : } |f'(c)| \leq \frac{1}{2} \text{ و } f(\ln 2) = \ln 2 ,$$

$$\text{فإن : } \forall x \in \mathbb{R}^+ : |f(x) - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |x - \ln 2|$$

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، لدينا $u_n \in \mathbb{R}^+$ ، لأن $f(\mathbb{R}^+) =]0, 1] \subset \mathbb{R}^+$. إذن : $|f(u_n) - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

$$\text{وبالتالي فإن : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|}$$

$$\text{ب- نبين بالترجع أن : } \forall n \in \mathbb{N} : |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln 2| . (*)$$

العلاقة (*) صحيحة من أجل $n = 0$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نفترض أن العلاقة (*) صحيحة من أجل n ونبين أنها صحيحة من أجل $n + 1$.

$$\text{لدينا : } |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_{n+1} - \ln 2| \text{ و } |u_{n+2} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_{n+1} - \ln 2| \text{ و } |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln 2|$$

$$\text{إذن : } |u_{n+1} - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} \times |u_0 - \ln 2| \text{ أي : } |u_{n+1} - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \ln 2|$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln 2|} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$\text{جـ- لدينا : } |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2| \text{ و } \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ و } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

حسب مصاديق التقارب ، لدينا $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$

IV. نعتبر F الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt & ; x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$. نعلم أن f تناقصية قطعاً على \mathbb{R} ، إذن :

إذا كان $x > 0$ ، فإن :

$$\begin{aligned} x \leq t \leq 2x &\Rightarrow f(2x) \leq f(t) \leq f(x) \\ &\Rightarrow \int_x^{2x} f(2x) dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt \\ &\Rightarrow xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x) \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}} \end{aligned}$$

إذا كان $x < 0$ ، فإن :

$$\begin{aligned} 2x \leq t \leq x &\Rightarrow f(x) \leq f(t) \leq f(2x) \\ &\Rightarrow \int_{2x}^x f(x) dt \leq \int_{2x}^x f(t) dt \leq \int_{2x}^x f(2x) dt \\ &\Rightarrow -xf(x) \leq -F(x) \leq -xf(2x) \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

ب- لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{e^x-1}{x}(e^x+1)} = \frac{0}{1 \times 2} = 0$

فإن : $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0)$ ، وبالتالي فإن F متصلة في 0 .

ج- لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{2x}{e^{2x}-1} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \leq \frac{x}{e^x-1}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{e^x-1}{x}(e^x+1)} = \frac{2}{1 \times 2} = 1$

فإن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = 1$ ، ومنه فإن F قابلة للاشتقاق في 0 و $F'(0) = 1$.

2. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا $f : t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ دالة متصلة على المجال $[x, 2x]$ أو $[2x, x]$ حسب

إشارة x ، فهي تقبل دالة أصلية φ على المجال $[x, 2x]$ أو $[2x, x]$ ، و $\varphi'(x) = f(x)$ ، $\forall x \in \mathbb{R}^*$

إذن : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1} dt = [\varphi(t)]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$

لدينا φ و $x \mapsto 2x$ قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}^* و $2x \in \mathbb{R}^*$ ، $\forall x \in \mathbb{R}^*$

إذن : F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* و لكل $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$F'(x) = (\varphi(2x) - \varphi(x))' = (2x)' \varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2x \frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{4}{e^x+1} f(x) - f(x)$$

$$F'(x) = \left(\frac{4}{e^x+1} - 1 \right) f(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1} f(x)$$

وبالتالي فإن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1} f(x)$

ب- نعلم أن f متصلة وتناقصية قطعاً على المجال $]-\infty, +\infty[$.

إذن : $]-\infty, +\infty[=]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[=]0, +\infty[$ ، ومنه فإن : $f(x) > 0$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$

وبما أن $F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1} f(x)$ ، $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ، فإن إشارة $F'(x)$ هي إشارة $(3-e^x)$.

$$3-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

إذن : F تناقصية قطعاً على المجال $[\ln 3, +\infty[$ وتزايدية قطعاً على كل من المجالين $]0, \ln 3]$ و

$]-\infty, 0[$.

النهاية.

بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ، لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = -\infty$ و $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

فإن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ ، وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{t^2}{e^t - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{t^2}{e^t} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^t}} = 0$

حيث $t = 2x$ ، لأن : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^{\frac{t}{2}}} \right)^2 = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{2u}{e^u} \right)^2 = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\frac{e^u}{u}} \right)^2 = 0$ ، وذلك بوضع $u = \frac{1}{2}t$

وأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 0$ ، فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة F على \mathbb{R} كما يلي :

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$
$F(x)$	$-\infty$	$F(\ln 3)$		0

$$F(\ln 3) = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} \frac{t}{e^t - 1} dt = -\frac{3}{2}(\ln(3))^2 - di \log(9) + di \log(3) \approx 0,4385061927$$

حيث : $di \log(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1-t} dt$ هي الدالة الأصلية للدالة $t \mapsto \frac{\ln t}{1-t}$ على والتي تنعدم في 1

(هذه الدالة خارج المقرر)

(\mathcal{E}_F) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ ولدينا $\frac{2x}{e^{2x} - 1} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{x}{e^x - 1}$ و $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = +\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$ ومنه فإن (\mathcal{E}_F) يقبل فرعا شلجيميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأرتاب.

إنشاء المنحنى (\mathcal{E}_F) :

