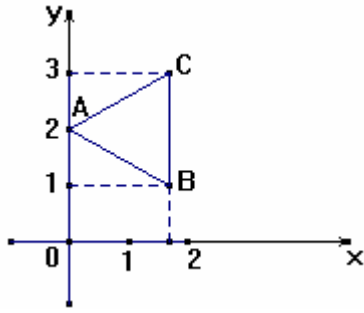


...

(b) - إنشاء $A(a = 2i)$ و $B(b = \sqrt{3} + i)$ و $C(c = \sqrt{3} + 3i)$:



$$(a) \quad \left(\frac{b-a}{c-a} \right) = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{\left[1, -\frac{\pi}{3} \right]}$$

(b) - نستنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

$$(a) \quad c-a = (\sqrt{3}+3i) - (2i) = \sqrt{3}+i = b$$

(b) - لدينا $c-a = b-0$ إذن $\overline{AC} = \overline{OB}$ ولدينا المثلث ABC متساوي الأضلاع ومنه فإن الرباعي $OBCA$ معين.

التمرين الثالث:

$$(1) \quad \text{عدد النتائج الممكنة هو: } \boxed{80} = 5 \times 4 \times 4 = A_5^2 \times A_4^1$$

$$(2) \quad \text{عدد النتائج التي تكون فيها الكرات الثلاث تحمل الرقم 0 هو:}$$

$$\boxed{12} = 3 \times 2 \times 2 = A_3^2 \times A_2^1$$

$$(3) \quad \text{عدد النتائج التي يكون فيها مجموع أرقام الكرات الثلاث يساوي 2 هو}$$

$$\boxed{28} = A_2^2 \times A_2^1 + A_2^1 \times A_3^1 \times A_2^1 + A_3^1 \times A_2^1 \times A_2^1$$

التمرين الرابع:

$$\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \int_{-1}^0 (1 - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx$$

$$= [x - e^x]_{-1}^0 + [e^x - x]_0^1 = \boxed{\frac{1}{e} + e - 2}$$

$$\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x \ln(x)} \right) dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln'(x)}{e \ln(x)} dx$$

$$= [\ln(\ln(x))]_e^{e^2} = \boxed{\ln(2)}$$

$$(2) \quad (a) \quad \text{ليكن } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1 + \tan^2(x)}{\tan^2(x)}$$

(b)

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2(x)} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1 + \tan^2(x)}{\tan^2(x)} \right) dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan'(x)}{\tan^2(x)} dx = \left[-\frac{1}{\tan(x)} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

التمرين الأول:

(1) (a) - لدينا $\overline{AB} (1, 0, -1)$ و $\overline{AC} (0, -2, -2)$ إذن

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = \boxed{-2(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})}$$

(b) - بما أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية.

(2) - نستنتج من (1) أن المتجهة $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ منظمة على

المستوى (ABC) إذن معادلة هذا الأخير هي على شكل:

$$x - y + z + d = 0$$

وبما أن $A(0, 1, 1) \in (ABC)$ فإن $d = 0$ وبالتالي فإن:

$$\boxed{(ABC): x - y + z = 0}$$

(3) (a) - يمكن لمعادلة الفلكة (S) أن تكتب:

$$\boxed{R=1} \quad \text{إذن شعاع } (S) \text{ هو } \boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z)^2 = (1)^2}$$

و مركزها هو $\boxed{\Omega(1, 2, 0)}$

(b) - لتكن d مسافة Ω عن المستوى (ABC) لدينا:

$$d = \frac{|1 - 2 + 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

فإن: المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

$$(c) \quad \text{ليكن } R' \text{ شعاع } (\Gamma) \text{ ؛ } R' = \sqrt{R^2 - d^2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

**لتكن النقطة $H(x_H, y_H, z_H)$ مركز (Γ) ؛ نجد من

$$H \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R} \text{ ؛ } \begin{cases} x_H = 1 + k \\ y_H = 2 - k \\ z_H = k \end{cases} \text{ و } x_H - y_H + z_H = 0$$

(4) ليكن (P) أحد المستويين الموازيين ل (ABC) و المماسين ل (S)

معادلة (P) هي على شكل: $x - y + z + m = 0 / m \in \mathbb{R}$

لتكن d' مسافة Ω عن (P) لدينا $d' = R$ و

$$d' = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 2 + 0 + m|}{\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow m = 1 - \sqrt{3} \text{ أو } m = 1 + \sqrt{3}$$

وبالتالي فإن المستويين الموازيين ل (ABC) و المماسين ل (S) هما:

$$\begin{cases} (P_1): x - y + z + 1 - \sqrt{3} = 0 \\ (P_2): x - y + z + 1 + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني: $(E): z \in \mathbb{C}; z^2 - (\sqrt{3} + 3i)z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

$$(1) \quad (a) \quad (-\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$$

(b) - مميز (E) هو $\Delta = 2 - 2i\sqrt{3} = (-\sqrt{3} + i)^2 \neq 0$ إذن ل (E)

حلين مختلفين هما: $a = 2i$ و $b = (\sqrt{3} + i)$ وبالتالي: $S = \{a, b\}$

$$(2) \quad (a) \quad b = \left[2, \frac{\pi}{6} \right] \text{ و } c = \left[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} \right]$$

و نستنتج هندسيا أن (C_f) يقبل في 0 مماس معادلته $y = f(0)$

$$\boxed{y = 1} \text{ أي}$$

(a) (3)

$$(\forall x \in]0, +\infty[), f'(x) = [e^{-x} + \ln(x+1)]'$$

$$= -e^{-x} + \frac{1}{x+1} = e^{-x} \left(\frac{e^x}{x+1} - 1 \right)$$

$$= e^{-x} \left(\frac{e^x - x - 1}{x+1} \right) = \boxed{\frac{e^{-x} g(x)}{(x+1)}}$$

(b)

$$(\forall x \in]-\infty, 0[), f'(x) = \left(\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1 \right)'$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) \right) = \boxed{\left(-\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \right) (x+1)}$$

بما أن $x < 0$ فإن $-\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x+1$.

(c)

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	+
f(x)	1	$1 - \frac{1}{e}$	1	$+\infty$

(a) (4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + \ln(x+1)}{x}$$

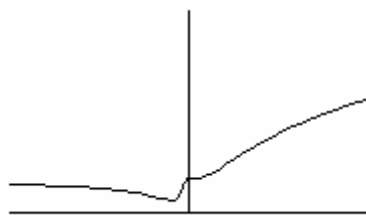
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x e^x} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 0$$

(b)

* (C_f) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفصيل

* (C_f) يقبل مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته هي: $y = 1$

(c)



$$\lambda(\Delta) = \int_0^1 (e^{-x} + \ln(x+1)) dx$$

$$= [-e^{-x} + (x+1) \ln(x+1) - (x+1)]_0^1$$

$$= \boxed{-e^{-1} + 2 \ln(2)}$$

(3)

$$J = [x \cos(\pi \ln(x))]_1^e + \pi \int_1^e x \sin(\pi \ln(x)) \frac{1}{x} dx$$

$$= -(e+1) + \pi \int_1^e \sin(\pi \ln(x)) dx = -(e+1) + \pi K$$

$$K = [x \sin(\pi \ln(x))]_1^e - \pi \int_1^e x \cos(\pi \ln(x)) \frac{1}{x} dx$$

$$K = -\pi J \text{ إذن}$$

$$J = -(e+1) - \pi^2 J \text{ وبالتالي}$$

$$\boxed{J = -\left(\frac{e+1}{\pi^2 + 1} \right)} \text{ ومنه}$$

مسألة:

الجزء الأول:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ و}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}), g'(x) = e^x - 1 \quad \text{(a) (2)}$$

(b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'(x)		0	
g(x)	$+\infty$	0	$+\infty$

(c) بما أن 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة g عند 0 فإنه:

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^*), g(x) > 0}$$

(3) نعتبر الدالة h بحيث: $h(x) = g(x) - x$, $(\forall x \in]1, 2[)$ ، لدينا:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in]1, 2[), \\ (\exists! \alpha \in]1, 2[) / h(\alpha) = 0 \text{ إذن} \\ h'(x) = e^x - 2 > 0 \\ h(1) \times h(2) < 0 \end{array} \right.$$

وبالتالي للمعادلة $[x \in \mathbb{R}, g(x) = x]$ حل وحيد في المجال $]1, 2[$

الجزء الثاني:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1 \right) = \boxed{1} \text{ و } \boxed{D_f = \mathbb{R}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} + \ln(x+1)] = \boxed{+\infty} \text{ و}$$

(2) لدينا $f(0) = 1$ إذن

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} [t \ln^2(t)]$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} [2\sqrt{t} \ln(\sqrt{t})]^2 = \boxed{0}$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[\frac{e^{-x} + \ln(x+1) - 1}{x} \right]$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[-\frac{1}{e^x} \frac{e^x - 1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} \right] = -1 + 1 = \boxed{0}$$

نستنتج جبريا أن f قابلة للإشتقاق في 0 وأن $f'(0) = 0$

(1)

$$U_1 = g(U_0) = e^{\ln(2)} - \ln(2) - 1 \quad (U_0 = \ln(2) \text{ لأن } *)$$

$$= 2 - \ln(2) - 1 = \boxed{1 - \ln(2)}$$

* بما أن $0 < 1 - \ln(2) < \ln(2) < 1 < \alpha$ فإن $\ln(2) < 1$ و $1 < \alpha < 2$

$$\text{وبالتالي فإن: } \boxed{0 < U_1 < U_0 < \alpha}$$

(2) نبين بالترجع على n من \mathbb{N} أن $0 < U_n < \alpha$

*أساس التراجع: $0 < U_0 < \alpha$ وذلك حسب السؤال السابق

*فرضية التراجع: ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نفترض أن $0 < U_n < \alpha$ و نبين أن:

$$0 < U_{n+1} < \alpha$$

نعلم أن g تزايدية قطعاً على \mathbb{R}_+ إذن بالخصوص على $[0, \alpha]$

وبما أن $0 < U_n < \alpha$ فإن $g(0) < g(U_n) < g(\alpha)$ و حيث إن $g(0) = 0$ و $g(\alpha) = \alpha$ و $g(U_n) = U_{n+1}$ فإن $0 < U_{n+1} < \alpha$

$$\text{*خاتمة: } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_n < \alpha}$$

(3) نبين بالترجع على n أن $0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$

*أساس التراجع: $0 < U_1 < U_0 < \alpha$ وذلك حسب السؤال (1)

*فرضية التراجع: ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نفترض أن $0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$ و نبين أن:

$$0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$$

نعلم أن g تزايدية قطعاً على $[0, \alpha]$ إذن نستنتج من الافتراض أن

$$g(0) < g(U_{n+1}) < g(U_n) < g(\alpha)$$

$$0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$$

*خاتمة: $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$

إذن المتتالية (U_n) تناقصية

(4) نعتبر المجال $I = [0, \alpha]$ ، لدينا

* g متصلة و تزايدية قطعاً على I و حيث $g(0) = 0 / g(\alpha) = \alpha$

$$\text{فإن } g(I) = I \text{ إذن } \boxed{g(I) \subset I}$$

$$\text{* } \boxed{U_0 \in I} \text{ إذن } 0 < U_0 < \alpha$$

* (U_n) تناقصية و مصغرة إذن (U_n) متقاربة

بهذه المعطيات نستنتج أن نهاية (U_n) ، l ، تحقق $l \in I$ و $g(l) = l$

و بما أن 0 و α هما الحلين الوحيديين في I للمعادلة $g(l) = l$ و

(U_n) تناقصية فإن $l = 0$

$$\text{*خاتمة: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = 0}$$