

إذن : $z_2 = -2 - i(1 - \sqrt{3}) - z_1 = -2 - i(1 - \sqrt{3}) + 1 + i = -1 + i\sqrt{3}$

2. لدينا : $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ؛ إذن :

$$z_1 = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + \pi \right] = \left[\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right]$$

ولدينا : $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ؛ إذن :

$$z_2 = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left[2, \pi - \frac{\pi}{3} \right] = \left[2, \frac{2\pi}{3} \right]$$

3. الشكل المثلثي ل Z هو : $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right]}{\left[2, \frac{2\pi}{3} \right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{12} \right]$

والشكل الجبري ل Z هو :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(-1-i)(-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

ومنه نستنتج أن : $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ ؛ إذن : $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

التمرين الثالث :

في الفضاء (E) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛ نعتبر :

النقطتين A (2, -1, 0) و B (3, 0, 1) ؛

والمستويين (P) : $x + y + z - 1 = 0$ و (Q) : $2x + y + 2z + 3 = 0$.

1. ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة A والعمودي على المستوى (Q) .

لدينا : $\vec{u}(2, 1, 2)$ متجهة منظمية على المستوى (Q) ولدينا $(\Delta) \perp (Q)$ ؛ إذن :

التمرين الأول :

1. لدينا : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

$$I = 1 - [Arc \tan x]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

وبالتالي فإن : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$

2. نضع : $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ ؛ إذن : $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$

لدينا u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[0, \ln 2]$ ؛ و u' و v' دالتين متصلتين على المجال $[0, \ln 2]$. حسب المكاملة بالأجزاء ؛ لدينا :

$$J = \int_0^{\ln 2} u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} u(x)v'(x) dx = [xe^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx$$

$$J = \ln(2)e^{\ln(2)} - 0 - [e^x]_0^{\ln 2} = 2\ln(2) - (e^{\ln(2)} - 1) = 2\ln(2) - 1$$

وبالتالي فإن : $J = \int_0^{\ln 2} xe^x dx = 2\ln(2) - 1$

التمرين الثاني :

نعتبر في المجموعة C ؛ المعادلة :

$$(E) : z^2 + [2+i(1-\sqrt{3})]z + 1 + \sqrt{3} + i(1-\sqrt{3}) = 0$$

1. لدينا : $(-1-i)^2 + [2+i(1-\sqrt{3})](-1-i) + 1 + \sqrt{3} + i(1-\sqrt{3})$

$$= 2i - 2 - 2i - i(1-\sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + i(1-\sqrt{3}) = 0$$

إذن : $z_1 = -1-i$ حل للمعادلة (E) . ليكن z_2 الحل الآخر للمعادلة (E) .

نعلم أن : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2+i(1-\sqrt{3})}{1} = -2-i(1-\sqrt{3})$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = -t \\ y-5 = 0 \\ z-1 = t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5-t \\ y = 5 \\ z = 1+t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم (D)؛

(D) هو تقاطع المستويين (P) و (Q)

3. ليكن (R) المستوى المار من النقطة B والعمودي على المستويين (P) و (Q)

إذن (R) عمودي على المستقيم (D) ؛ وبما أن $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-1, 0, 1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) ؛ فإنها متجهة منظمة على المستوى (R) .

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء (E) . لدينا :

$$M \in (R) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3) + (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + z + 2 = 0$$

وبالتالي فإن معادلة ديكارتية للمستوى (R) هي : $-x + z + 2 = 0$.

4. لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(1, 1, 3)$ وشعاعها $R = 3$.

أ- لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء (E) . لدينا :

$$M \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 2 = 0$$

ب- لدينا : $d(\Omega, (P)) = \frac{|1+1+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} < R$ ؛ إذن :

المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة $\mathcal{C}(\omega, r)$ التي :

\vec{u} متجهة موجهة للمستقيم (Δ) . لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء (E) ؛

لدينا : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ و \vec{u} مستقيمتان

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 2t \\ y+1 = t \\ z-0 = 2t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 2t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

2. لدينا $\vec{u}(2, 1, 2)$ متجهة منظمة على المستوى (Q) و $\vec{v}(1, 1, 1)$ متجهة

منظمة على المستوى (P) ؛ ولدينا :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + \vec{k} \neq \vec{0}$$

إذن \vec{u} و \vec{v} متجهتان غير مستقيمتان ؛ ومنه فإن المستويين (P) و (Q)

متقاطعان وفق مستقيم (D) موجه بالمتجهة $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-1, 0, 1)$ ؛ معادلتين

$$\begin{cases} x+y+z-1 = 0 \\ 2x+y+2z+3 = 0 \end{cases} : \text{ديكارتيتين له هما} :$$

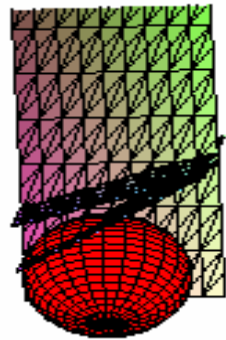
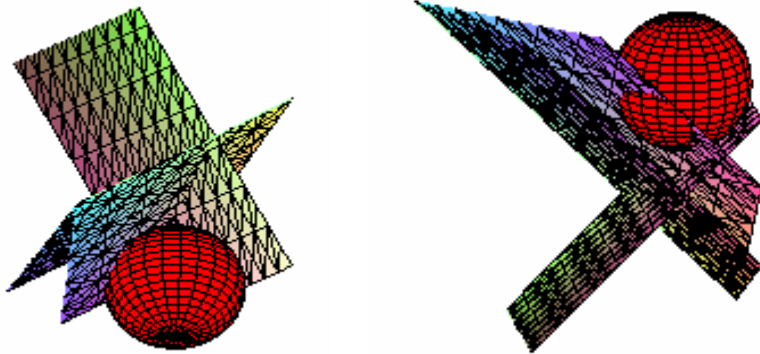
من أجل $z=1$ (مثلا) ؛ نجد : $\begin{cases} x+y = 0 \\ 2x+y+5 = 0 \end{cases}$. إذن :

$$\begin{cases} y = -x \\ 2x-x+5 = 0 \end{cases} : \text{ومنه فإن} : \begin{cases} y = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

وبالتالي فإن النقطة $C(-5, 5, 1)$ تنتمي إلى المستقيم (D) .

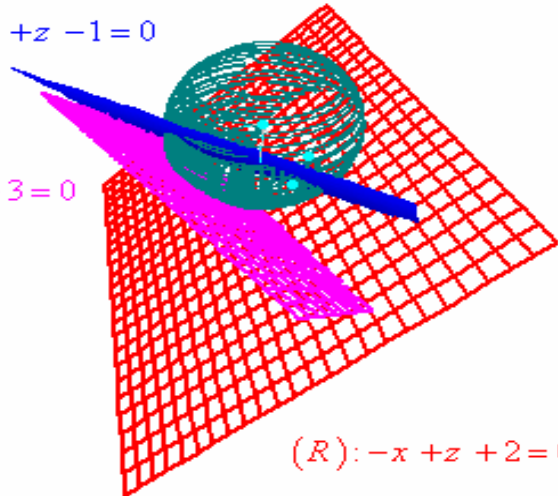
لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء (E) ؛ لدينا :

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$$
 و $\vec{u} \wedge \vec{v}$ مستقيمتان
$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{CM} = t\vec{u} \wedge \vec{v}$$



$$(P): x + y + z - 1 = 0$$

$$(Q): 2x + y + 2z + 3 = 0$$



$$(R): -x + z + 2 = 0$$

$$.r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{16}{3}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{\sqrt{33}}{3} : شعاعها :$$

مركزها $\omega(x, y, z)$ هو المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P) :

لدينا $\overline{AB} (1,1,1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) ؛ $\ll \overline{AB} \perp (P) \gg$

و $A(2, -1, 0) \in (P)$ ؛ إذن $\omega = A$ هو مركز الدائرة $\mathcal{E}(\omega, r)$.

وبالتالي فإن $(S) \cap (P) = \mathcal{E}\left(A, \frac{\sqrt{33}}{3}\right)$ حيث $A(2, -1, 0)$.

نعطي الشكل النهائي بواسطة البرنامجين Maple و winplot كما يلي :

with(geometry) :

with(geom3d) :

plane(P,x+y+z=1,[x,y,z]) :

plane(Q,2*x+y+2*z=-3,[x,y,z]) :

plane(R,-x+z=-2,[x,y,z]) :

line(D,[P,Q]) :

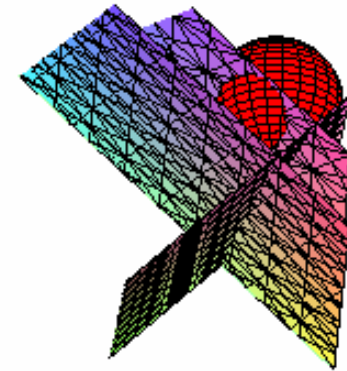
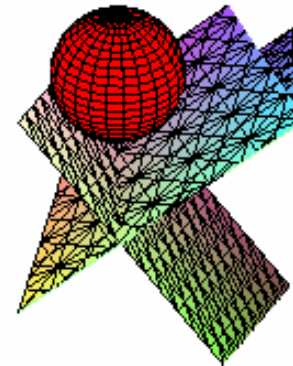
_EnvXName :=x : _EnvYName :=y : _EnvZName :=z :

sphere(S,(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9,[x,y,z]) ;

intersection(D,P,Q) ;

ArePerpendicular(P,R) ; ArePerpendicular(Q,R) ;

draw([P,Q,R ,D,S(color=red)]);



$$. f(2) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + \ln(3-x) = 2 + \ln(1) = 2 \text{ و}$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$: فإن f متصلة في النقطة 2.

$$. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + \ln(3-x) - 2}{x - 2} \quad \text{أ- لدينا :}$$

نضع $t = 3 - x$. إذن : $x \rightarrow 2^- \Leftrightarrow t \rightarrow 1^+$ و منه فإن :

$$. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1 - t + \ln(t)}{1 - t} = \lim_{t \rightarrow 1^+} 1 + \frac{\ln(t)}{1 - t} = \boxed{0}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة 2 ولدينا : $f'_g(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} \quad \text{لدينا :}$$

$$. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \frac{x^2 - 2x}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \boxed{+\infty}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 2 .

ب- لدينا : f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة 2 و $f'_g(2) = 0$. إذن

\mathcal{E}_f يقبل نصف مماس على اليسار في النقطة التي أفصولها 2 معادلته :

$$(f'_g(2) = 0 \text{ و } f(2) = 2) . (T_g) \quad \begin{cases} y = 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} y = f'_g(2)(x - 2) + f(2) \\ x \leq 2 \end{cases}$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$. إذن \mathcal{E}_f يقبل نصف مماس رأسي ؛ موجه

نحو الأعلى ؛ على اليمين في النقطة التي أفصولها 2 .

3. ليكن $x \in]2, +\infty[$ لدينا :

$$f'(x) = (x + \sqrt{x^2 - 2x})' = 1 + \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 1 + \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} > 0$$

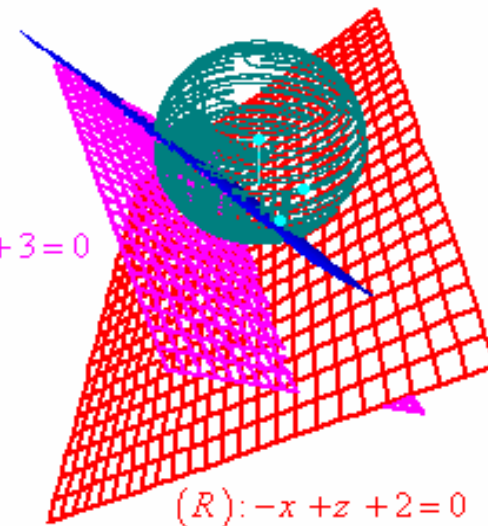
إذن f تزايدية قطعاً على المجال $]2, +\infty[$.

ليكن $x \in]-\infty, 2[$ لدينا :

$$f'(x) = (x + \ln(3-x))' = 1 + \frac{(3-x)'}{3-x} = 1 - \frac{1}{3-x} = \frac{2-x}{3-x} > 0$$

إذن f تزايدية قطعاً على المجال $]-\infty, 2[$.

$$(P): x + y + z - 1 = 0$$



$$(Q): 2x + y + 2z + 3 = 0$$

$$(R): -x + z + 2 = 0$$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x + \ln(3-x) & ; x \leq 2 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} & ; x > 2 \end{cases}$$

أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(3-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3-t + \ln(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3-t \left(1 - \frac{\ln(t)}{t}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$$

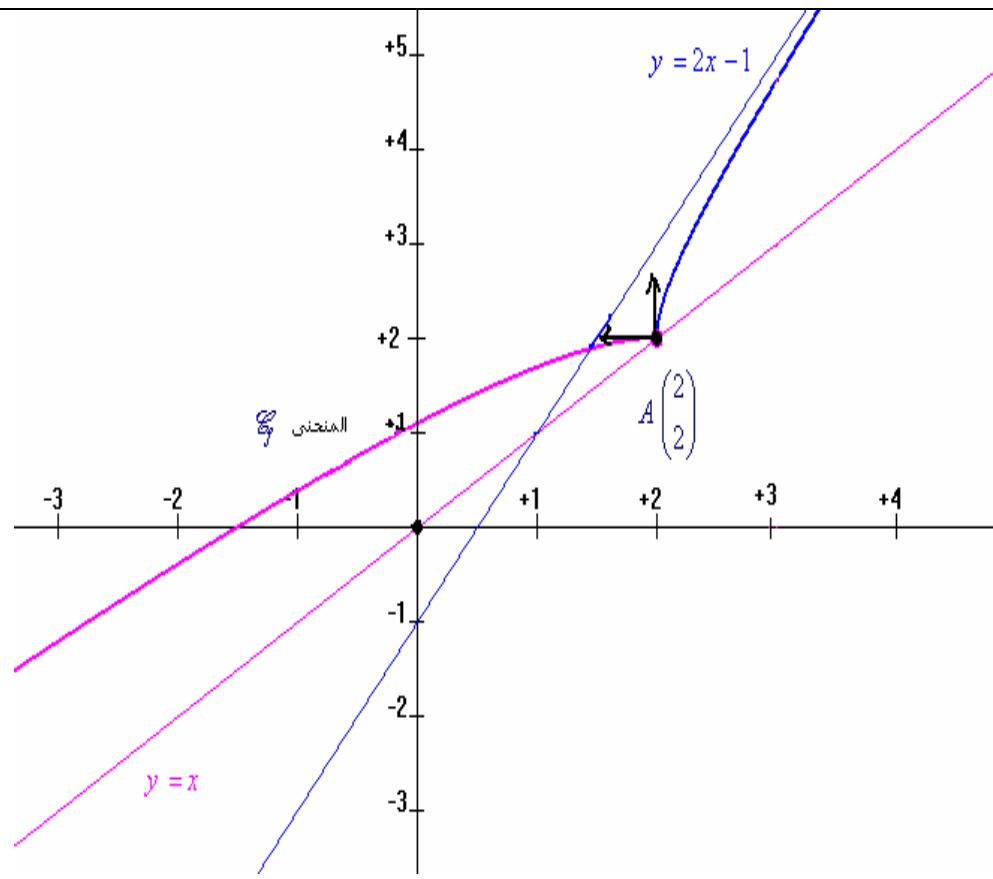
حيث : $t = 3 - x$ ؛ ولدينا : $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + |x| \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + x \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x}\right)}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + \sqrt{x^2 - 2x} = 2$



6. ليكن g قصور الدالة f على المجال $[2, +\infty[$.

أ- لدينا g متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[2, +\infty[$. إذن g تقابل من المجال

$$J = g([2, +\infty[) = [g(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[= [2, +\infty[$$

ب- لدينا : $g^{-1} : [2, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$
 $x \mapsto y = g^{-1}(x) ?$

ليكن $x \in [2, +\infty[$ و $y \in [2, +\infty[$ بحيث : $y = g^{-1}(x)$ ينبغي تحديده ؟

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = y + \sqrt{y^2 - 2y} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x - y = \sqrt{y^2 - 2y}$$

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} كما يلي :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

4. لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 - 2x} - 2x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x})^2 - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) + x - 1}} = 0$$

إذن \mathcal{E}_f يقبل مقارباً مائلاً ؛ بجوار $+\infty$ ؛ معادلته : $y = 2x - 1$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و بوضع $t = 3 - x$ نجد $t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow -\infty$ و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(3 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{\ln(3 - x)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(t)}{3 - t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(t)}{t} \times \frac{1}{\frac{3}{t} - 1} = 1$$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3 - x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$ ؛ حيث $t = 3 - x$.

إذن \mathcal{E}_f يقبل فرعاً شلجياً ؛ بجوار $-\infty$ ؛ اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

5. إنشاء المنحنى \mathcal{E}_f في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) :

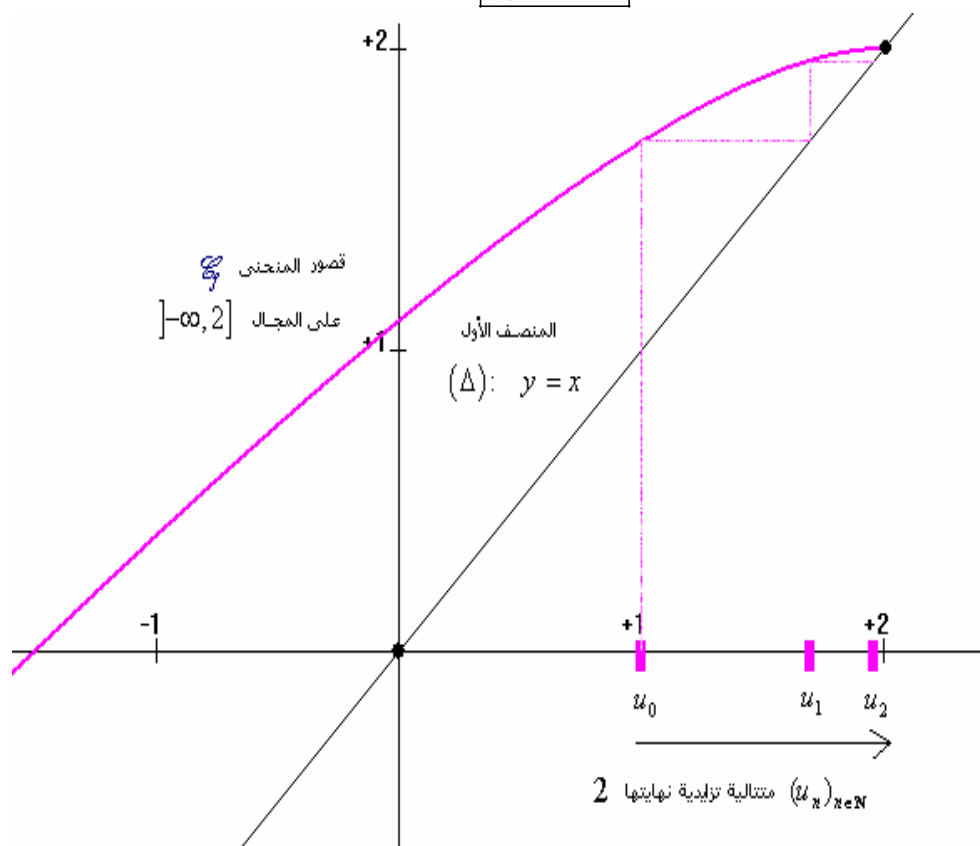
نشئ الفرعين اللانهائين للمنحنى \mathcal{E}_f .

نشئ نصفياً مماساً للمنحنى \mathcal{E}_f في النقطة ذات الأفصول 2.

نحسب بعض الصور عند الاقتضاء .

إذن : $f(l) = l \Leftrightarrow l = l + \ln(3-l) \Leftrightarrow \ln(3-l) = 0 \Leftrightarrow 3-l = 1 \Leftrightarrow l = 2$

وبالتالي فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$



بالتوفيق إنشاء الله



$$\begin{aligned} y = g^{-1}(x) &\Rightarrow (x-y)^2 = y^2 - 2y \\ &\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 2y \\ &\Rightarrow x^2 = 2xy - 2y \\ &\Rightarrow x^2 = (2x-2)y \\ &\Rightarrow y = \frac{x^2}{2(x-1)} \end{aligned}$$

$$g^{-1} : [2, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{2(x-1)}$$

وبالتالي فإن :

7. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \ln(3-u_n) = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل $n = 0$ ؛ لدينا : $u_0 = 1$ ؛ إذن : $0 < u_0 \leq 2$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن : $0 < u_n \leq 2$.

نبين أن : $0 < u_{n+1} \leq 2$.

لدينا f تزايدية قطعاً على المجال $]0, 2]$ ؛ إذن :

$$0 < u_n \leq 2 \Rightarrow f(0) < f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow 0 < \ln(2) < u_{n+1} \leq 2 \Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq 2$$

وبالتالي فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq 2$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1} - u_n = \ln(3-u_n)$. وبما أن :

$$u_{n+1} - u_n = \ln(3-u_n) \geq 0 \text{ ؛ فإن : } 0 < u_n \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -u_n < 0 \Rightarrow 1 \leq 3-u_n < 3$$

ومنه فإن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية .

ج- لدينا $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية ومكبورة بالعدد 2 . إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة .

ولدينا : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in]0, 2]$.

f دالة متصلة على المجال $]0, 2]$.

f مستقر بالدالة $f :]0, 2] \rightarrow]\ln(2), 2] \subset]0, 2]$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l .