التمرين الأول:

1) أ- $\overrightarrow{AB}(-2;-1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;-1;1)$ إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\right)$ أي
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;-2;-1)$

ب- بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) فإن ، $(ABC): x-2y-z+e=0$. و بما أن $C\in(ABC)$ فإن $-1+e=0$ أي $e=1$ و منه فإن $x-2y-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ج- بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة موجهة للمستقيم (D) إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو : $(D):\begin{cases}x=2+t\\ y=-2-2t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=1-t\end{cases}$

2)أ- شعاع الفلكة (S) هو :

$$\begin{aligned}R&=d\left(\Omega,(ABC)\right)\\&=\frac{|2-(2\times 2)-1+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

إذن : $(S):(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)=\left(\frac{2\sqrt{6}}{6}\right)^2$ أي $(S): x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z+\frac{25}{3}=0$

التمرين الثاني:

1) نضع $P(n): 0\le u_n\le 1$

لدينا $0\le u_0\le 1$ أي $P(0)$ عبارة صحيحة

نفرض أن $P(n)$ عبارة صحيحة لكل عدد صحيح طبيعي أصغر من أو يساوي n

لدينا حسب الفرضية السابقة :

$$\begin{aligned}0\le u_n\le 1&\Leftrightarrow 0\le\sqrt[3]{u_n}\le 1\\&\Leftrightarrow 1\le 1+\sqrt[3]{u_n}\le 2\\&\Leftrightarrow 1\le\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3\le 8\\&\Leftrightarrow \frac{1}{8}\le\frac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3\le 1\\&\Leftrightarrow \frac{1}{8}\le u_{n+1}\le 1\end{aligned}$$

أي $0\le u_{n+1}\le 1$. إذن لكل n من $\mathbb{N}$ ، $0\le u_n\le 1$

2) لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3-u_n$$
$$=\frac{\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3-8u_n}{8}$$
$$=\frac{\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3-\left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^3}{8}$$
$$=\frac{\left(1+\sqrt[3]{u_n}-2\sqrt[3]{u_n}\right)\left(\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^2+2\sqrt[3]{u_n}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)+\left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^2\right)}{8}$$
$$=\frac{\left(1-\sqrt[3]{u_n}\right)\left(\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^2+2\sqrt[3]{u_n}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)+\left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^2\right)}{8}$$

إشارة $u_{n+1}-u_n$ هي إشارة $1-\sqrt[3]{u_n}$. و بما أن $0\le u_n\le 1$ فإن $\sqrt[3]{u_n}\le 1$ وبالتالي لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}-u_n\ge 0$
أي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية .

خلاصة: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية و مكبورة فهي إذن متقاربة.

3)أ- لكل n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1}=\sqrt[3]{u_{n+1}}-1$$
$$=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3}-1$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)-1$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u_n}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(v_n)$$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب- لكل n من $\mathbb{N}$:

$$v_n=v_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=-1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

من العلاقة $\forall n\in N; v_n=\sqrt[3]{u_n}-1$ نستنتج أن $u_n=(v_n+1)^3=\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right)^3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right)^3=1$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

4)

$$\begin{aligned}S &= \sqrt[3]{u_0}+\sqrt[3]{u_1}+\sqrt[3]{u_2}+.......+\sqrt[3]{u_{n-1}}\\ &=(v_0+1)+(v_1+1)+(v_2+1)+......+(v_{n-1}+1)\\ &=n+(v_0+v_1+v_2+.....+v_{n-1})\\ &=n+v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)\\ &=n-2\left(1-\frac{1^n}{2}\right)\end{aligned}$$

التمرين الثالث

1) أ- $\left(3+i\sqrt{3}\right)^2=9+6i\sqrt{3}-3=6+6i\sqrt{3}$

ب-

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(1+3i\sqrt{3}\right)^2+32\\ &=1+6i\sqrt{3}-27+32\\ &=6+6i\sqrt{3}\end{aligned}$$

إذن $3+i\sqrt{3}$ هو أحد الجذور المربعة للعدد العقدي Δ. $z_1=\frac{\left(1+3i\sqrt{3}\right)+\left(3+i\sqrt{3}\right)}{2}=2+2i\sqrt{3}$

$$z_1=\frac{\left(1+3i\sqrt{3}\right)-\left(3+i\sqrt{3}\right)}{2}=-1+i\sqrt{3}$$

ج- $|z_1|=4$ ، $\arg(z_1)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_1=\left[4,\frac{\pi}{3}\right]$

$|z_2|=2$ ، $\arg(z_2)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_1=\left[2,\frac{2\pi}{3}\right]$

2) أ-

$$\begin{aligned}\frac{z_B-z_A}{z_B} &= \frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\left(2+2i\sqrt{3}\right)}{-1+i\sqrt{3}}\\ &=\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\\ &=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4}\\ &=\frac{3+3i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-3}{4}\\ &=i\sqrt{3}\end{aligned}$$

بما أن $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ عدد تخيلي صرف $\left(\sqrt{3} \in \mathbb{R}_+^*\right)$ فإن $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ و نعلم أن

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right) \equiv \overline{\left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}\right)}[2\pi]$ أي OAB مثلث قائم الزاوية في الرأس B

ب- OAB مثلث قائم الزاوية في B ، إذن كي يكون $OBAC$ مستطيل يكفي أن يكون $OBAC$ متوازي الأضلاع أي $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ و بما أن $\overrightarrow{BA}\left(3; \sqrt{3}\right)$ فإن $C\left(3; \sqrt{3}\right)$ إذن $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

مسألة

1) لدينا $f(0) = \sqrt{0 \times \ln(0+1)} = 0$.

و بما أن

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \ln(e^{2x} - e^x + 1) \\ &= \ln(1 - 1 + 1) \\ &= 0 \\ &= f(0)\end{aligned}$$

فإن الدالة f متصلة في 0

2)أ- الجواب في متناول الجميع

ب-

$$\begin{aligned}f'_g(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{e^{2x} - e^x} \times e^x \times \frac{e^x - 1}{x} \\ &= 1\end{aligned}$$

لأن $\left(f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{e^{2x} - e^x} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \right)$ و $\left(\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right)$

$$\begin{aligned}f'_d(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}} \\ &= 1\end{aligned}$$

بما أن $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$ فإن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و $f'(0) = 1$.

3) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right) = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x\ln(x+1)} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\times\frac{(x+1)}{x}}$$
$$=0$$

لأن ($\lim_{h\to+\infty}\frac{\ln(h)}{h}=0$ = $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}$) و ($\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$)

<u>خلاصة</u>: بما أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ فإن المستقيم $\boxed{y=0}$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$.

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ فإن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محر الأفاصيل .

4)أ-
- لكل $x\prec 0$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$$
$$=\frac{2\left(e^{x}\right)^{2}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$$
$$=\frac{e^{x}\left(2e^{x}-1\right)}{e^{2x}-e^{x}+1}$$

لاحظ أن الصيغ e^{x} و $e^{2x}-e^{x}+1$ موجبة قطعا على $]-\infty;0[$ إذن إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;0[$ هي إشارة العدد $2e^{x}-1$ ($2e^{x}-1$ تنعدم عند $x=-\ln 2$)

- لكل $x\succ 0$ لدينا :

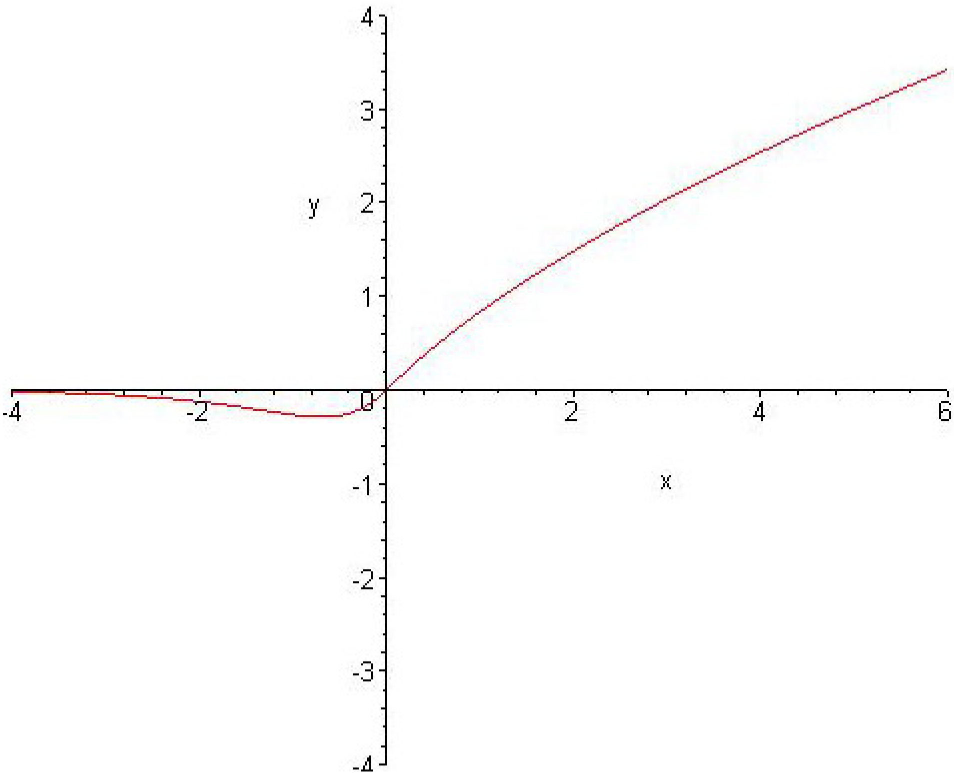
$$f'(x)=\frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2\sqrt{x\ln(x+1)}}$$ لاحظ أن لكل $x\succ 0$ ، $x+1\succ 1$ أي $\ln(x+1)\succ 0$ و بالتالي

$\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\succ 0$ أي $f'(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب-

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\ln\frac{3}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$

5)



6) أ-

لكل x من المجال $[0;1]$ لدينا :

$$\frac{x^2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}=(x-1)+\frac{1}{x+1}$$

إذن :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1 (x-1)+\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}+\ln(2)$$

ب- الحجم المطلوب هو :

$$V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 x\ln\left(x+1\right)dx$$

نضع:

$$u(x)=\ln(x+1) \qquad u'(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$v(x)=\frac{x^2}{2} \qquad v'(x)=x$$

إذن :

$$\begin{aligned}V&=\pi\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx\right)\\&=\pi\left(\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln(2)\right)\right)\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(7

أ- الدالة h متصلة و تزايدية قطعا على المجال $I=\left[-\ln 2;0\right]$ إذن فهي تقابل من I نحو المجال $J=h\left(I\right)=\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right);0\right]$ وتقبلدالة عكسية من J نحو I :

$$\begin{aligned}h^{-1}:J&\to I\\x&\mapsto h^{-1}(x)=y\end{aligned}$$

لكل x من J و لكل y من Iلدينا :

$$\begin{aligned}h^{-1}(x)=y&\Leftrightarrow x=h(y)\\&\Leftrightarrow x=\ln\left(e^{2y}-e^y+1\right)\\&\Leftrightarrow e^x=e^{2y}-e^y+1\\&\Leftrightarrow\left(e^y\right)^2-\left(e^y\right)+\left(1-e^x\right)=0\\&\Leftrightarrow\left(e^y-\frac{1+\sqrt{4e^x-3}}{2}\right)\left(e^y-\frac{1-\sqrt{4e^x-3}}{2}\right)=0\\&\Leftrightarrow\ e^y=\frac{1+\sqrt{4e^x-3}}{2}\end{aligned}$$

إذن : $y=\ln\left(\frac{1+\sqrt{4e^x-3}}{2}\right)$